COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 16 FÉVRIER 1880.

PRÉSIDENCE DE M. EDM. BECQUEREL.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ASTRONOMIE. — *Observations méridiennes des petites planètes, faites à l'Observatoire de Greenwich (transmises par l'Astronome royal, M.* G.-B. Airy) *et à l'Observatoire de Paris pendant le quatrième trimestre de l'année* 1879. Communiquées par M. Mouchez.

Dates. 1879.	Temps moyen de Paris.	Ascension droite.	Correction de l'éphémér.	Distance polaire.	Correction de l'éphémér.	Lieu de l'observation.
			(10) Hygie.			
	h m s	h m s	s	° ′ ″	″	
Sept. 30	11.57.39	0.35. 2,51	— 0,63	80.21.14,1	+ 3,8	Paris.
Oct.. 3	11.43.39	0.32.49,49	— 0,81	80.35. 1,6	+ 3,9	Paris.
4	11.38.59	0.32. 5,22	— 0,92	80.39.43,5	+ 4,7	Paris.
6	11.29.40	0.30.37,50	— 0,74	80.49.11,5	+ 4,0	Paris.
7	11.25. 0	0.29.53,97	— 0,60	80.53.55,5	+ 1,1	Paris.
11	11. 6.25	0.27. 2,23	— 0,63	81.13.13,9	+ 1,0	Paris.

Dates. 1879.	Temps moyen de Paris.	Ascension droite.	Correction de l'éphémér.	Distance polaire.	Correction de l'éphémér.	Lieu de l'observation.
			(135) HERTHA.			
	h m s	h m s	s	° ′ ″	″	
Oct.. 3	10.47. 8	23.36. 8,93	— 2,57	91. 3.20,0	+10,2	Paris.
4	10.42.30	23.35.26,93	— 2,53	91. 6.27,9	+11,2	Paris.
6	10.33.18	23.34. 6,82	— 2,58	91.12.21,9	+11,2	Paris.
7	10.28.45	23.33.29,06	— 2,47	91.15. 2,4	+ 5,5	Paris.
11	10.10.46	23.31.13,55	— 2,11	91.24.52,2	+10,0	Paris.
			(92) UNDINE.			
Oct.. 3	12.28.23	1.17.41,09	+ 1,04	97.58. 3,4	— 4,9	Paris.
4	12.23.43	1.16.57,05	+ 0,95	98. 2.46,1	— 7,0	Paris.
6	12.14.23	1.15.28,13	+ 0,86	98.11.58,5	— 4,1	Paris.
7	12. 9.43	1.14.43,59	+ 1,09	98.16.20,4	— 5,9	Paris.
10	11.55.40	1.12.28,52	+ 1,15	98.28.42,4	— 8,0	Paris.
11	11.50.59	1.11.43,25	+ 1,01	98.32.34,5	— 7,3	Paris.
25	10.55.13	1. 1.39,32	+ 1,61	99. 9.20,0	— 6,4	Greenwich.
30	10.23. 6	0.58.30,61				Paris.
31	10.18.35	0.57.55,38		99.14. 9,2		Paris.
			(19) FORTUNA.			
Oct.. 16	12.27.53	1.59. 5,42	+15,16	77.38.35,9	—76,9	Greenwich.
25	11.44.43	1.51.16,87	+15,94	78.31.59,8	—85,2	Greenwich.
30	11.11.28	1.47. 0,52	+15,35	79. 1.50,1	—78,4	Paris.
31	11. 6.43	1.46.10,87	+15,19	79. 7.39,4	—78,0	Paris.
Nov.. 3	10.52.32	1.43.47,07	+14,97	79.24.40,4	—77,9	Paris.
5	10.43. 9	1.42.16,30	+15,02	79.35.38,8	—73,0	Paris.
12	10.11. 0	1.37.37,34	+14,34	80. 9.53,9	—73,2	Paris.
13	10. 6.30	1.37. 3,43		80.14.11,2		Paris.
13	10.15.49	1.37. 3, 3		80.14.13,1		Greenwich.
			(49) PALÈS.			
Oct.. 16	12.36.34	2. 7.47,73	+ 9,65	71.28.48,6	—64,4	Greenwich.
25	11.54.11	2. 0.47,23	+ 9,76	72. 5.39,2	—64,0	Greenwich.
30	11.21.18	1.56.51,61	+ 9,60	72.29. 3,3	—68,2	Paris.
31	11.16.36	1.56. 5,25	+ 9,49	72.33.58,6	—64,6	Paris.
Nov.. 3	11. 2.33	1.53.49,50	+ 9,44	72.48.41,1	—69,2	Paris.
12	10.21. 6	1.47.44,97	+ 9,22	73.33. 7,0	—65,9	Paris.
13	10.16.35	1.47. 9,72		73.37.55,2		Paris.

l'usage est très-général en ce qui touche la Géométrie plane. Mais là ne se bornent pas les avantages du Calcul des Équipollences : il fournit en outre à l'Algèbre et à l'Analyse des objets géométriques réels à la place de symboles imaginaires.

A cette traduction sont jointes quelques additions, lesquelles consistent le plus souvent en développements de passages du texte lui-même. De plus, l'Auteur a extrait des divers Mémoires de M. Bellavitis certaines questions choisies parmi les plus intéressantes, et qu'il a réunies dans un Appendice de quelques pages.

Comment pourrait-on, en France, continuer à rester dans l'ignorance d'une méthode qui a pris chez nous sa première origine, lorsque cette méthode si féconde est connue et utilisée, depuis quarante ans bientôt, de l'autre côté des Alpes, et dans presque tous les pays où l'on cultive les Mathématiques?

TABLE DES MATIÈRES.

IIe Partie. — Applications de la méthode des équipollences a la solution graphique de quelques problèmes.

Procédés généraux. — Conséquences géométriques des principes de la méthode des équipollences. Marche générale à suivre pour la solution d'un problème. Emploi de l'élimination. Équipollence $z\varepsilon^u AB \mathrel{\underline{\triangle}} CD$. Équipollence $zAB + yCD \mathrel{\underline{\triangle}} OU$. Équipollence $\varepsilon^u AB + yCD \mathrel{\underline{\triangle}} OU$. Équipollence $\varepsilon^u AB + \varepsilon^v CD \mathrel{\underline{\triangle}} OU$. Équipollence $\varepsilon^u AB + \varepsilon^{-u} CD \mathrel{\underline{\triangle}} OU$.

Problèmes divers. — Construire un triangle CBX, connaissant CB, CBD et la relation $BX = a + mCX$. Addition du Traducteur au nº 69: autre solution du problème précédent. Plus courte distance de deux points animés de mouvements rectilignes uniformes. Extension à l'espace du problème précédent. Construire un triangle ABC, connaissant AB, AC et la bissectrice AD. Propriété de la bissectrice d'un angle d'un triangleAddition du Traducteur au nº 73 : autre démonstration de la propriété de la bissectrice. Construire un triangle, connaissant les longueurs de deux côtés et les positions de deux points coupant deux côtés dans des rapports donnés. Construire un triangle semblable à un triangle donné, et dont les sommets soient à des distances données d'un point O. Déterminer le point X d'où l'on voit sous des angles donnés les côtés du triangle ABC. Seconde solution du problème précédent. Inscrire dans un cercle un polygone dont les côtés passent par des points donnés ou soient de longueurs données. Cas particulier. Emploi des fonctions alternées ou déterminants. Condition pour que les perpendiculaires aux extrémités des droites OA′, OB′, OC′ se rencontrent en un même point. Circonscrire à un cercle un polygone dont les angles aient leurs sommets situés sur des droites données ou soient de grandeurs données. Cas particulier. On donne A, B, C; trouver la base commune des triangles AXY, BXY, CXY, connaissant les différences de leurs angles aux sommets et les rapports entre les rapports de leurs côtés. Construire un triangle, connaissant la base, le produit ou le rapport des deux autres côtés, et la somme ou la différence de deux angles à la base. Autre solution. Cas d'impossibilité. On donne trois circonférences ayant un même point commun I. Mener la droite IXZY, telle que XZ, XY soient dans un rapport donné. Extension à quatre sphères ayant un point commun. Additions du Traducteur au nº 89 : I. Solution géométrique du problème précédent. II. Inscrire entre quatre droites données un quadrilatère semblable à un quadrilatère donné.

IIIe Partie. — Formules trigonométriques, et quelques autres exercices sur la méthode des équipollences.

Formules trigonométriques. — Formule fondamentale. Relation entre deux côtés d'un triangle et les angles opposés. Expressions des sinus, cosinus et tangentes. Relation entre un angle et les côtés. Relation entre deux côtés, l'angle compris et un angle opposé. Quadrilatère ayant deux angles opposés égaux. Équipollences entre deux droites quelconques. Emploi des formules précédentes.

Exercices sur le triangle. — Problème. On donne un triangle ABC; E divise AB dans un rapport donné : déterminer la longueur $CE = z$. Théorème sur le barycentre (centre de gravité) d'un système de points. Application au triangle. Problème. De quels coefficients faut-il affecter les sommets A, B, C, pour que leur barycentre soit le centre R du cercle circonscrit au triangle ABC? Intersection commune H des trois hauteurs d'un triangle. Addition du traducteur au nº 102 : les trois hauteurs d'un triangle se rencontrent en un même point. Conditions pour que le barycentre de A, B, C soit le point de rencontre H des hauteurs du triangle ABC. Relation entre le barycentre G d'un triangle, le centre R du cercle circonscrit, et le point de rencontre H des hauteurs. Conséquence relative au quadrilatère inscriptible. Relations entre les points A, B, C, H et leur barycentre O. Relations diverses. Cercle des neuf points. Cercle inscrit dans un triangle.. Somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit. Barycentre F du périmètre d'un triangle. Relation entre le point F et les cercles exinscrits. Barycentres du périmètre d'un triangle, en regardant un côté comme négatif.

Exercices sur les aires polygonales. — Produit des aires de deux polygones. Cas de deux triangles. Cas général. Remarque sur la question précédente. Pseudo-centre d'un assemblage de polygones. Cas d'un triangle. Multilatéral. Aire d'un multilatéral. Produit des aires d'un polygone et d'un multilatéral. Expression

symbolique. Théorème de Statique. Addition du traducteur au n° 120 : Quelques propriétés des barycentres.

Exercices sur quelques questions de Géométrie supérieure. — Rapport anharmonique. Formules relatives aux rapports anharmoniques. Figures inverses. Points correspondants de ceux à l'infini. Points se correspondant à eux-mêmes. Détermination des centres d'inversion. Propriétés des points se correspondant à eux-mêmes. Relation entre les points se correspondant à eux-mêmes et les centres d'inversion. Cas des figures semblables. Cas où les centres d'inversion coïncident. Relations entre six points d'un plan.

IVe Partie. — Applications diverses a la théorie des courbes.

Préliminaires. — Représentation d'une courbe. Représentation du mouvement d'un point. Procédés de calcul à employer

Parabole. — Équipollence de la parabole. Tangente. Sous-tangente. Angle de la tangente et du rayon vecteur. Mouvement parabolique d'un point pesant. Normale. Sous-normale. Transport de l'origine au sommet de la courbe. Développée. Rayon de courbure.

Ellipse. —. Équipollence de l'ellipse. Tangente. Propriété de la normale. Premier théorème d'Apollonius. Second théorème d'Apollonius, et propriété de la tangente. Trouver les foyers, connaissant deux diamètres conjugués. Description de l'ellipse, par un point d'une droite de longueur constante. Mouvement elliptique d'un point attiré par un centre en raison directe de la distance. L'ellipse est une hypocycloïde. Addition du traducteur au n° 152 : Étude de l'hyperbole.

Cycloïde. — Génération et équipollence de la cycloïde. Dérivée de ε^t. Tangente et normale. Accélération du mouvement considéré. Rayon de courbure, et développée. Développée imparfaite. Trajectoires orthogonales d'une cycloïde glissant sur sa base. Rectification de la courbe. Quadrature.

Problèmes généraux. — Généralité des applications de la méthode des équipollences. Trouver la développée d'une courbe. Autre procédé. Cas de coordonnées orthogonales. Exemple de la spirale logarithmique. Construction géométrique du rayon de courbure. Nouvelle expression du rayon de courbure. Déterminer l'ordre du contact de deux courbes. Exemple d'une parabole et d'une circonférence. Osculation de deux mouvements. Cercle osculateur d'une courbe. Développée imparfaite d'une courbe. Déterminer une courbe parallèle à une courbe donnée. Généralisation du problème précédent. Déterminer les développantes d'une courbe donnée. Rayon de courbure de la développante. Développante du cercle. Direction de la droite MW qui divise par moitié la corde infiniment petite parallèle à la tangente en M. Parabole ayant un contact du troisième ordre avec une courbe donnée. Exemple de la développante du cercle Addition du traducteur au n° 181 : Extension à une courbe quelconque. Cas des coordonnées parallèles. Exemple de la spirale logarithmique. Conique ayant un contact du quatrième ordre avec une courbe donnée. Exemple de la développante du cercle. Cas des coordonnées parallèles. Exemples divers. Enveloppe d'un système de courbes. Changement du paramètre variable. Problème sur les enveloppes, relatif à l'ellipse. Trajectoires obliques des ellipses concentriques et confocales. Additions du traducteur au n° 192 : I. Trajectoires obliques d'un système de courbes planes. II. Développante d'une courbe plane. Solution directe du même problème. Génération de la courbe obtenue. Propriétés diverses de la même courbe.

APPENDICE. — Exercices divers.

Trouver la courbe dont la tangente en un point quelconque a une inclinaison égale aux $\frac{2}{3}$ de celle du rayon vecteur. Trouver le centre de gravité d'un arc de spirale logarithmique homogène. Mouvement d'un point soumis à une force passant par un point fixe. Mouvement d'un corps pesant dans un milieu résistant. Chaînette homogène. Points fictifs. Généralisation des coordonnées bipolaires.

(*Nouvelles Annales des Mathématiques*, 1873-1874.)

330 Paris — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

Dates 1879.	Temps moyen de Paris.	Ascension droite.	Correction de l'éphémér.	Distance polaire.	Correction de l'éphémér.	Lieu de l'observation.
			(13) Égérie.			
	h m s	h m s	s	° ′ ″	″	
Oct.. 16	13.11.24	2.42.43,99	+ 0,25	78.26.36,2	— 7,8	Greenwich.
25	12.26.37	2.33.18,00	+ 0,57	78.12. 9,3	— 9,0	Greenwich.
30	11.52. 2	2.27.40,55	+ 0,42	78. 4.21,8	—10,7	Paris.
31	11.46.57	2.26.32,01	+ 0,31	78. 2.50,0	— 8,5	Paris.
Nov.. 3	11.31.45	2.23. 6,46	+ 0,46	77.57.59,7	—13,1	Paris.
12	10.46.21	2.13. 4,02	+ 0,32	77.42.34,8	—10,0	Paris.
13	10.41.21	2.12. 0,18	+ 0,35	77.40.41,0	—10,5	Paris.
13	10.50.40	2.11.59,90	+ 0,48	77.40.41,9	— 8,8	Greenwich.
18	10.25.57	2. 6.55,39	+ 0,55	77.30.29,9	— 9,5	Greenwich.
			(32) Pomone.			
Nov.. 3	11.38. 9	2.29.32,22	— 1,39	75.11. 4,3	+ 8,1	Paris.
12	10.54.56	2.21.40,14	— 1,39	76. 6.55,0	+ 4,8	Paris.
13	10.50.10	2.20.50,20	— 1,35	76.12.57,7	+ 4,3	Paris.
			(9) Métis.			
Nov.. 12	11.50.13	3.17. 6,80	— 7,42	75.10.15,8	+35,9	Paris.
13	11.45.13	3.16. 2,64	— 7,37			Paris.
13	11.54.32	3.16. 2,30	— 7,29	75.10.49,5	+38,1	Greenwich.
14	11.49.32	3.14.58,11	— 7,24	75.11.17,8	+36,8	Greenwich.
19	11.24.36	3. 9.40,51	— 6,99	75.13.10,4	+37,0	Greenwich.
22	11. 9.44	3. 6.36,07	— 7,10	75.13.40,9	+37,6	Greenwich.
Déc.. 2	10.12. 3	2.57.31,41	— 6,84	75.10.30,8	+38,9	Paris.
			(12) Victoria.			
Nov.. 22	12.43.33	4.40.40,03	— 7,65	70.32.50,4	+18,9	Greenwich.
Déc.. 6	11.23.49	4.25.15,38	— 7,75	71.48.37,7	+27,3	Paris.
9	11. 8.52	4.22. 6,43	— 7,63	72. 4. 1,1	+28,2	Paris.
			(24) Thémis.			
Déc.. 6	12. 8.59	5.10.33,09	— 0,42			Paris.
8	11.59.18	5. 8.43,54	— 0,51	66.15. 4,9	+ 6,5	Paris.
9	11.54.27	5. 7.48,41	— 0,66	66.15.59,8	+ 6,1	Paris.

» Les comparaisons se rapportent aux éphémérides du *Berliner Jahrbuch*.

» Les observations ont été faites à Paris par M. Renan. »

ASTRONOMIE. — *Détermination de la différence de longitude entre Paris et Bregenz;* par MM. Lœwy et Th. von Oppolzer.

« J'ai l'honneur de rendre compte à l'Académie d'une opération qui a été effectuée en 1874 au nom de l'Autriche par M. Oppolzer, Correspondant de l'Institut, chargé de la direction des travaux géodésiques, et par moi au nom de l'Observatoire de Paris : il s'agit de la détermination des différences de longitude entre Paris et Bregenz. Cette opération, qui a pour but de relier la France et l'Autriche-Hongrie par un second point, présente un très grand intérêt à un double point de vue. Bregenz est le point presque le plus occidental de l'empire d'Autriche. La station du Pfender, située sur une montagne dans le voisinage immédiat de la ville, à une altitude de 1064^{m} environ, est un des points principaux du réseau géodésique européen. Par cette station l'Autriche se trouve déjà reliée à l'Allemagne, à l'Italie et à la Suisse.

» Cette détermination avait une grande opportunité à une époque où nous ne nous trouvions rattachés par aucune opération moderne au reste de l'Europe. La nouvelle entreprise avait donc un double but : nous relier une deuxième fois à l'Autriche et indirectement aux trois autres pays. La fermeture du triangle Paris-Vienne, Vienne-Bregenz et Paris-Bregenz nous fournissait de plus un contrôle précieux pour l'exactitude des trois longitudes successivement déterminées à cette époque.

» L'opération n'a pas été exécutée en double et d'une manière indépendante par les astronomes des deux pays; il a fallu alors établir un plan préalable aussi bien pour le choix des instruments que pour les méthodes à employer.

» Il fut décidé d'installer dans les deux stations des instruments aussi identiques que possible et des appareils électriques construits d'après les mêmes principes. L'instrument établi au Pfender était une lunette droite de $0^{m},67$, sortie des ateliers de MM. Repsold et fils, à Hambourg. La lunette de Paris est celle qui avait déjà servi pour la longitude de Vienne et dont la description se trouve déjà dans les *Annales*, Mémoires, Tome IX.

» Se rendant au désir de l'observateur français, M. Oppolzer avait fait disposer à la station autrichienne une mire permettant de vérifier à tout instant l'état instrumental.

» Pour tenir compte de l'équation personnelle, il fut décidé de faire deux

séries d'opérations. La première a été effectuée en laissant les astronomes dans leurs stations respectives, et la deuxième en échangeant les postes d'observation.

» Pendant la première série, nous avons eu à lutter contre des conditions climatologiques défavorables. Le voisinage du lac de Constance, du Rhin et la configuration particulière de la grande chaîne des Alpes, qui entourent le Pfender, donnait lieu, pendant cette saison, à la formation de fréquentes agglomérations nuageuses aussi gênantes pour le travail astronomique que pour les observateurs. Elles rendaient souvent très difficiles les communications avec Bregenz, de telle sorte que M. Oppolzer se vit contraint de vivre presque un mois dans un isolement à peu près complet.

» La station a été gardée par un détachement de troupes autrichiennes sous le commandement du premier lieutenant G. chevalier de Steeb, qui remplissait en outre les fonctions d'assistant et nous a, en cette qualité, rendu des services sérieux.

» Les Administrations des lignes télégraphiques de Suisse, d'Autriche et de France ont bien voulu mettre à notre disposition un fil direct, ce qui nous a permis de faire l'échange de signaux sans l'intervention d'aucun appareil de translation.

» Pour la détermination de l'heure, nous avons employé les positions d'étoiles données dans le Catalogue des étoiles de culmination lunaire et de longitude publié par M. Lœwy. Pour apporter dans nos recherches une plus haute précision, nous avons effectué une première réduction qui nous a permis, à l'aide des fondamentales, de rectifier les ascensions droites des étoiles de longitude dont la position offrait encore quelque incertitude; en combinant les corrections ainsi trouvées avec celles obtenues ultérieurement pour les observations faites entre Paris, Marseille et Alger, nous avons pu baser nos recherches sur un Catalogue d'étoiles affranchi de toute erreur accidentelle et ne renfermant plus qu'une légère erreur systématique, inhérente aux groupes d'étoiles fondamentales employés.

» Par cette méthode, il nous a été permis d'utiliser pour la correction des pendules toutes les étoiles observées dans le cours d'une soirée et de nous dispenser de les observer simultanément dans les deux stations.

» Nous avons établi la règle de comparer les pendules deux fois chaque soir, au commencement et à la fin de nos opérations. Ce procédé est particulièrement recommandable, car il donne le moyen de déterminer directement le mouvement relatif des deux pendules, sans qu'il soit nécessaire de recourir aux observations astronomiques. Dans quelques soirées cepen-

dant nous n'avons pu remplir cette partie importante de notre programme, le mauvais état des lignes télégraphiques nous permettant à peine d'obtenir un seul échange de signaux.

» L'instruction générale à laquelle devaient se conformer les observateurs, aussi fidèlement que possible, contenait les articles suivants :

» 1° Effectuer un retournement de l'instrument durant l'observation de chaque étoile polaire;

» 2° Obtenir dans les deux positions de la lunette un nombre égal d'observations;

» 3° Déterminer l'azimut à l'aide des mêmes étoiles polaires.

» Ayant établi ainsi le plan de l'observation sur des instruments et des procédés identiques, nous ne nous sommes imposé aucune gêne pour ce qui constitue le mode de réduction des observations faites dans les deux stations. Cette liberté d'action nous semblait ne renfermer aucun inconvénient et offrait même un intérêt spécial. Il s'agissait de savoir si ce procédé différent de réduction n'accuserait pas une différence sensible dans l'évaluation de certaines constantes instrumentales. La comparaison des résultats ainsi obtenus d'une manière indépendante devait fournir aussi un contrôle précieux pour l'exactitude de nos calculs.

» Nous avons trouvé pour l'azimut et la mire, pour la valeur du niveau, les distances des fils et les inégalités des tourillons, des résultats qui présentent un accord très satisfaisant. Nous avons pu aussi constater d'une manière tout à fait indépendante une anomalie instrumentale qui se manifeste beaucoup plus souvent qu'on ne pourrait le supposer *a priori*, surtout lorsqu'il s'agit de petits instruments. La comparaison de la collimation par le retournement sur les polaires avec celle que nous a fournie la mire nous a révélé toujours une différence, très faible il est vrai, mais cependant assez sensible, entre ces deux données. Après un examen attentif de toutes les circonstances, nous avons reconnu que cette différence ne peut être attribuée qu'à un déplacement de l'axe optique pendant la rotation de la lunette. Pour corriger les observations de l'effet de cette variabilité de la ligne divisée, nous avons dû appliquer aux positions obtenues une correction empirique, et nous avons supposé le déplacement de l'axe optique proportionnel au cosinus de la distance zénithale.

» Dans le Tableau suivant on trouve l'ensemble de la détermination de l'heure effectuée dans les quatre séries d'observations. On a attribué à chaque correction du pendule un poids choisi, en tenant compte autant que possible de toutes les circonstances qui peuvent influer sur l'exactitude.

Ce poids, pour plus d'impartialité, estimé d'avance et sans connaître le degré de concordance que présentent les valeurs obtenues dans les diverses soirées, nous a servi pour combiner les résultats des observations effectuées simultanément dans les deux stations.

» En désignant par g le poids de la correction du pendule calculé pour l'instant de la comparaison dans une station et par g' celui de l'autre station, on a donné le poids $\frac{gg'}{g+g'}$ à la longitude déduite des deux séries d'observations considérées.

» Voici maintenant le Tableau renfermant la correction de l'heure :

Tableau renfermant l'ensemble des déterminations de l'heure.

	PARIS (OBSERVATEUR : LOEWY).				BREGENZ (OBSERVATEUR : OPPOLZER).			
Dates.	$C p_m$ et variations horaires.			Poids.	$C p_m$ et variations horaires.			Poids.
	s	s	h		s	s	h	
1874. Juillet 18	+ 2,255	0,00	t — 18,64	0,1	//	//	//	//
» 20	+ 5,205	0,00	t — 18,82	0,1	//	//	//	//
» 21	— 12,097	0,00	t — 17,96	0,3	//	//	//	//
» 22	— 12,267	0,00	t — 18,35	0,2	— 0.347	— 0,016	t — 18,31	0,6
» 23	//	//	//	//	— 0,420	— 0,025	t — 13,71	0,1
» 25	— 12,680	0,00	t — 16,60	//	//	//	//	//
» 26	+ 11,330	0,00	t — 16,40	//	— 1,864	— 0,025	t — 15,71	0,6
» 27	+ 10,951	0,00	t — 18,64	1,3	— 2,219	— 0,014	t — 18,31	1,4
» 28	//	//	//	//	— 2,506	— 0,030	t — 16,25	0,3
» 29	— 13,050	0,00	t — 15,14	//	//	//	//	//
» 29	+ 8,800	0,00	t — 17,15	//	//	//	//	//
» 30	— 13,242	0,00	t — 16,31	0,4	//	//	//	//
» 30	— 13,030	0,00	t — 17,90	//	//	//	//	//
» 31	— 13,498	0,00	t — 16,43	0,3	//	//	//	//
Août 2	— 13,729	0,00	t — 19,41	1,3	— 5,202	— 0,032	t — 18,63	1,4
» 3	— 13,676	0,00	t — 17,77	0,9	— 5,690	— 0,038	t — 16,63	0,2
» 4	//	//	//	//	— 6,413	— 0,038	t — 19,74	0,4
» 6	— 9,943	0,00	t — 17,86	1,0	//	//	//	//
» 7	— 14,023	0,00	t — 19,12	1,3	— 8,274	— 0,058	t — 18,60	1,6
» 10	— 14,632	0,00	t — 19,08	0,6	— 10,576	— 0,045	t — 16,23	0,4
» 11	— 14,618	0,00	t — 19,44	1,4	— 11,312	— 0,045	t — 16,17	0,5
	PARIS (OBSERVATEUR : OPPOLZER).				BREGENZ (OBSERVATEUR : LOEWY).			
	s	s	h		s	s	h	
1874 Août 15	— 14,817	— 0,004	t — 18,1	0,2	//	//	//	//
» 16	— 14,932	— 0,004	t — 19,2	1,3	— 15,191	— 0,03	t — 22,26	1,5
» 17	— 15,090	— 0,004	t — 19,4	0,3	— 15,710	— 0,03	t — 16,5	0,2
» 18	— 15,000	//	//	//	— 16,856	— 0,04	t — 18,09	1,2
» 19	— 15,009	+ 0,001	t — 19,3	1,2	— 17,613	— 0,03	t — 18,70	1,5
» 20	— 15,007	+ 0,000	t — 19,4	1,2	— 18,058	— 0,025	t — 18,87	1,5
» 21	— 14,998	+ 0,000	t — 19,6	1,5	— 18,651	— 0,025	t — 18,13	1,5
» 22	— 15,000	//	//	//	//	//	//	//

» La comparaison des pendules a été faite à l'aide des signaux envoyés d'une station à l'autre au moyen des appareils électro-magnétiques men-

tionnés plus haut. Ces signaux étaient enregistrés automatiquement dans les deux localités, c'est-à-dire que chaque signal sur l'appareil de Paris en reproduisait un semblable sur celui de Bregenz et réciproquement.

» Les procédés spéciaux pour se rendre indépendants de l'intensité des courants qui interviennent ont été exposés dans les publications faites depuis par les deux observateurs.

» Chaque comparaison de pendules se compose de deux groupes de signaux émanant d'un même courant électrique; chaque groupe renferme deux séries de trente-deux signaux qui se correspondent deux à deux et dont la comparaison fournit la différence d'heures entre les deux pendules, différence affectée d'une petite inégalité provenant du temps que le courant met à parcourir l'intervalle qui sépare les deux stations.

» En agissant de cette façon on a pu obtenir avec beaucoup de précision, pour un même instant physique, l'heure relative des deux pendules, et, en appliquant au moyen du Tableau précédent aux heures locales les corrections de pendule calculées pour l'instant de la comparaison, on arrive à la valeur de la longitude, affectée encore de l'équation personnelle des deux observateurs:

M. Oppolzer observant au Pfender et M. Lœwy à Paris.

Juillet 22........	$29^{m}45^{s},32$
27........	45,42
Août 2........	45,41
3........	45,29
7........	45,30
10........	45,33
11........	29.45,43

M. Lœwy à la station du Pfender et M. Oppolzer à Paris.

Août 16........	$29^{m}44^{s},92$
19........	44,94
20........	44,93
21........	29.44,89

» Les valeurs individuelles de la longitude inscrites dans ce Tableau accusent une concordance exceptionnelle qui nous donne la preuve de l'exactitude de nos opérations.

» En formant les moyennes de ces deux séries d'observations, on obtient les deux valeurs de la longitude $29^{m}44^{s},918$ et $29^{m}45^{s},372$, différentes entre elles du double de l'équation personnelle des observateurs. Cet élément physiologique, ainsi déterminé, est égal à $0^{s},227$, et l'on trouve la différence de longitude entre le pavillon de l'Observatoire et la station du Pfender égale à $0^{h}29^{m}45^{s},145$. Pour avoir la valeur par rapport au point géodésique, il faut retrancher du nombre directement obtenu $0^{s},006$. On obtient ainsi, pour la différence de longitude entre le pavillon de l'Ob-

servatoire et le point géodésique du Pfender,

$$0^h 29^m 45^s, 14.$$

» Pour compléter notre travail et fournir une preuve indépendante de l'exactitude des résultats trouvés, nous avons déterminé directement la valeur de notre équation personnelle pendant deux soirées successives, lors du séjour de M. Oppolzer à Paris, après avoir obtenu la première série. Cette détermination directe nous a donné $0^s,259$, valeur qui, vu le petit nombre d'étoiles sur lequel se base notre observation, présente un accord très satisfaisant. »

CHIMIE. — *Études sur l'acide persulfurique. De sa formation par électrolyse;* par M. **Berthelot**.

« 1. J'ai établi en 1878 l'existence d'un nouvel acide du soufre, l'acide persulfurique, et j'ai obtenu ce corps : soit à l'état anhydre et cristallisé, par l'effluve électrique; soit à l'état dissous, par l'électrolyse. Je me suis proposé d'étudier davantage le dernier procédé, afin de préparer l'acide persulfurique en quantités notables et d'en mesurer la chaleur de formation. J'ai réussi à avoir des liqueurs renfermant couramment 88^{gr} d'acide persulfurique, S^2O^7, au litre et pouvant atteindre jusqu'à 123^{gr} : limite qui n'a pas été dépassée, et qu'il est même difficile d'atteindre et de maintenir, la vitesse de décomposition spontanée du nouvel acide devenant égale à sa vitesse de formation dans des conditions données. Pour achever de définir le phénomène, il suffira de dire que la dernière liqueur contenait en même temps 375^{gr} d'acide sulfurique, S^2O^6, et 850^{gr} d'eau. Le rapport entre les poids des deux acides était celui de 1 : 3, et la liqueur renfermait sept fois son volume d'oxygène actif, c'est-à-dire excédant la composition de l'acide sulfurique.

» 2. On obtient ces résultats en plaçant l'acide sulfurique, convenablement dilué, $SO^4H + 10HO$ par exemple, dans un vase poreux, entouré d'un vase concentrique rempli du même liquide; les liquides sont refroidis par de l'eau circulant dans deux serpentins intérieurs; les électrodes sont formées de gros fils de platine soudés dans des tubes de verre, qu'ils dépassent de 2 ou 3 centimètres. Le nouveau composé peut être obtenu, même avec des tensions assez faibles, mais en petite quantité. Il vaut mieux recourir à 6 ou 9 éléments Bunsen, attelés 2 à 2 ou 3 à 3.

» 3. J'ai opéré avec des liqueurs voisines des compositions suivantes : $SO^4H + HO$, $SO^4H + 2\frac{1}{2}HO$, $SO^4H + 3\frac{1}{2}HO$, $SO^4H + 6HO$, $SO^4H + 7HO$, $SO^4H + 10HO$ (1 partie d'acide bouilli + 2 parties d'eau environ), et j'ai prolongé l'électrolyse pendant deux, trois, et jusqu'à dix jours consécutifs.

» 4. Quelle que soit la concentration employée au début, l'électrolyse donne lieu à des phénomènes caractéristiques. D'une part, il y a endosmose électrique du pôle positif, où se forme l'acide persulfurique, vers le pôle négatif, les liquides qui entourent les pôles étant identiques au début. Par suite, le vase poreux se vide peu à peu et le niveau s'y abaisse. Ce n'est pas tout : l'eau traverse le vase poreux en quantité plus grande que l'acide; malgré les pertes dues à l'électrolyse même, la concentration de l'acide s'élève sans cesse dans le vase positif, celle du vase négatif diminuant.

» Quel que soit le degré de dilution originel, on traverse ainsi successivement tous les degrés de concentration. L'acide finit par ne renfermer qu'un demi-équivalent d'eau, en surplus de sa formule normale, $SO^4H + \frac{1}{2}HO$; terme qu'il est difficile de dépasser, parce que la conductibilité des liqueurs diminue, à mesure que l'on approche de l'acide monohydraté, lequel n'est plus guère électrolysable. Voici quelques chiffres :

	I.	III.	II.	IV.
Acide originel...	$SO^4H + 10HO$	$SO^4H + 7HO$	$SO^4H + 2,5HO$	$SO^4H + 1,3HO$
Après quelques jours d'électrolyse et malgré des additions d'eau...	$SO^4H + 6HO$	24h d'électrol... $+4,7HO$	16h d'électrol... $+2,2HO$	17h d'électrol... $+1,1HO$
		30 » ... $+3HO$	21 » ... $+2HO$	35 » ... $+0,9HO$
		48 » ... $+1,2HO$	40 » ... $+1,4HO$	48 » ... $+0,5HO$
			68 » ... $+1,3HO$	

» 5. En même temps que la concentration s'accroît, le caractère même de la réaction se modifie. A l'acide persulfurique pur, seul formé tant que l'acide renferme plus de 4HO, succède un mélange ou plutôt une combinaison de cet acide avec l'eau oxygénée. L'ensemble de ces deux produits tend, en effet, vers une composition définie, $S^2O^7 + 2HO^2$, le liquide principal étant compris entre $SO^4H + 3HO$ et $SO^4H + 2HO$. Mais, quand la concentration surpasse ce dernier terme, l'eau oxygénée tend à disparaître et elle se réduit à des quantités qui décroissent avec la dose de l'eau excédant l'acide monohydraté.

» 6. Donnons les nombres de nos expériences :

» 1° Soit d'abord la formation exclusive de l'acide persulfurique.

(1) $SO^4H + 10HO$ à l'origine.

» La proportion de l'eau a été maintenue au-dessus de 6HO, en rem-

plaçant tantôt par la liqueur originelle, tantôt par de l'eau pure la liqueur enlevée dans les dosages, ou chassée vers le pôle négatif. — 10^{cc} de liqueur renferment en oxygène actif (lequel est $\frac{1}{11}$ du poids de S^2O^7) :

Après 18 heures.	23^{mgr},2	Après 6 jours..	72^{mgr}	On ajoute de l'eau : le titre baisse à..............	100^{mgr}
» 42 heures.	51^{mgr},5	» 7 jours..	79	L'action de la pile ayant été interrompue un jour, nouvelle baisse à.......	64
» 4 jours...	60^{mgr}	» 8 jours..	87	Courant rétabli { 12 jours..	82
» 5 jours...	67^{mgr}	» 10 jours..	112	Courant rétabli { 13 jours...	98

» La liqueur demeure constamment exempte d'eau oxygénée ([1]), pendant l'électrolyse même; elle doit être analysée de suite.

» 2° Soit maintenant la production de l'eau oxygénée par électrolyse.

(2) $SO^4H + 7HO$ initial (vase poreux de petites dimensions).

» Après 24^h, $SO^4H + 4,7HO$: 51^{mgr} O actif (pas d'eau oxygénée).

» Après 30^h, $SO^4H + 3HO$: 67^{mgr} O actif; 17 sous forme de HO^2 et 50 de S^2O^7.

(3) $SO^4H + 2,5HO$ initial.

» Après 4^h : 34^{mgr} O actif, dont 8 sous forme de HO^2 et 26 de S^2O^7.

» Après 16^h : 74^{mgr} O actif, réparti également.

(4) $SO^4H + 1,3HO$ initial.

» Après 4^h : 24^{mgr} O actif, dont 3 sous forme de HO^2, et 21 de S^2O^7.

» 3° Soit la tendance de l'eau oxygénée et de l'acide persulfurique vers un rapport limite, pour les concentrations comprises entre $SO^4H + 3HO$ et $SO^4H + 2HO$.

(5) $SO^4H + 3HO$ initial.

» Après un certain temps : 86^{mgr} O actif, dont 29 sous forme de S^2O^7 et 57 de HO^7.

(6) $SO^4H + 2,5HO$ initial.

» Après 21^h, $SO^4H + 2,2HO$: 86^{mgr} O actif; 28 à l'état de S^2O^7 et 58 de HO^2.

(7) $SO^4H + 3HO$ initial.

» Après 3 jours, $SO^4H + 2,5HO$: 59^{mgr} O actif, dont 19 à l'état de S^2O^7 et 40 de HO^2.

([1]) On a dosé l'oxygène actif total par l'iodure de potassium et l'acide sulfureux, l'eau oxygénée par le permanganate de potasse, toujours en opérant sur des liqueurs très étendues.

» Le rapport $S^2O^7 + 2HO^2$ est d'autant plus remarquable qu'il se maintient sensiblement pendant la décomposition spontanée des liqueurs. Par exemple, la liqueur (5), conservée pendant 9 jours, est tombée à 35^{mgr} d'oxygène actif, dont 11 à l'état de S^2O^7 et 24 à l'état de HO^2. Après 27 jours, il n'y avait plus que 10^{mgr} d'oxygène actif, dont 3,5 à l'état de S^2O^7 et 6,5 à l'état de HO^2. La même liqueur ayant été portée à 50°, ce qui en a accéléré la décomposition, le rapport de ses deux composants, après refroidissement, a été trouvé le même.

» Le composé qui prend ainsi naissance, à l'état d'association avec l'acide persulfurique, est bien de l'eau oxygénée. En effet, il réduit le permanganate; il engendre de l'acide perchromique et du bioxyde de calcium, corps spécifiques; sa réaction sur l'iodure de potassium s'effectue avec les mêmes caractères chimiques et thermiques que celle de l'eau oxygénée pure, caractères tout spéciaux, comme on le dira plus loin; enfin la réduction totale des deux composés dégage la même quantité de chaleur.

» 4° Montrons encore que, pendant l'électrolyse d'un acide sulfurique initial plus concentré, l'eau oxygénée tend à disparaître, l'acide persulfurique subsistant et se formant de préférence, sans que cependant sa proportion maximum revienne aux mêmes limites que dans les liqueurs plus étendues citées précédemment.

» (8) Liqueur (6) renfermant aux débuts de la nouvelle expérience, c'est-à-dire :

» Après 22 heures d'électrolyse antérieure, $SO^4H + 2,2HO$: 86^{mgr} O actif, dont 28 à l'état de S^2O^7, 58 de HO^2.

» On poursuit l'électrolyse et l'on obtient :

» Après 40 heures, $SO^4H + 2HO$: 81^{mgr} O actif, dont 62 à l'état de S^2O^7, 19 de HO^2.
» Après 68 heures, $SO^4H + 1,3HO$: 62^{mgr} O actif, dont 54 à l'état de S^2O^7, 8 de HO^2.

» 7. Ainsi la formation de l'eau oxygénée par électrolyse passe par un maximum, lequel semble répondre à une *combinaison définie d'acide persulfurique et d'eau oxygénée* : $S^2O^7, 2HO^2$, analogue à la combinaison de bioxyde de baryum et d'eau oxygénée, BaO^2, HO^2, découverte par M. Schöne.

» La formation d'une telle combinaison s'opère seulement, comme il a été dit, à partir d'une certaine concentration : ce qui est sans doute attribuable à cette circonstance que dans un système complexe le courant électrolytique passe de préférence par le corps le moins résistant. Or ce corps peut changer de nature, dans un liquide acide dont l'état d'hydratation

se modifie peu à peu, par suite de l'endosmose électrique signalée plus haut. Aux débuts, le courant passerait ainsi par l'acide sulfurique étendu, en formant de l'acide persulfurique; plus tard, l'acide sulfurique étant devenu moins hydraté et plus résistant, l'electrolyse se porterait sur l'acide persulfurique et formerait de l'eau oxygénée; mais je n'insiste pas sur une interprétation fondé sur des faits encore obscurs.

» 8. Au contraire, je vais citer les faits propres à expliquer la disparition finale de l'eau oxygénée, dans les liquides électrolysés qui surpassent une certaine concentration. On en rend compte et on peut la reproduire, indépendamment de toute influence électrique, je veux dire par la réaction directe de l'acide sulfurique concentré sur l'eau oxygénée.

» En effet, j'ai pris 10^{cc} d'une solution d'eau oxygénée très pure, renfermant 26^{mgr} d'oxygène actif ($5^{gr},5$ de HO^2 au litre); je les ai refroidis vers 0° et je les ai mélangés, non sans précaution, avec de l'acide sulfurique bouilli, refroidi lui même à -12°, et plongé dans un appareil réfrigérant; la liqueur finale renfermait $SO^4H + HO$. Aussitôt après le mélange, la liqueur contenait encore 23^{mgr} d'oxygène actif, dont 3 seulement à l'état d'eau oxygénée et 20 à l'état d'acide persulfurique. Quelques heures après, l'eau oxygénée n'avait pas augmenté.

» Je suis arrivé au même résultat, en opérant au moyen du système qui renferme le composé $S^2O^7 + 2HO^2$ formé par électrolyse : ce composé est également détruit et changé presque totalement en acide persulfurique, lorsqu'on le mélange avec un excès d'acide sulfurique monohydraté.

» Réciproquement, un acide sulfurique moins concentré, mélangé avec l'eau oxygénée, ne forme pas d'acide persulfurique, pas plus que l'acide persulfurique en solution sulfurique concentrée ne régénère *immédiatement* l'eau oxygénée par une addition d'eau. Précisons : l'acide $SO^4H + 1,3HO$ étant mêlé avec un poids équivalent d'eau HO (laquelle renferme d'ailleurs $5^{gr},5$ d'eau oxygénée au litre), il se forme un peu d'acide persulfurique. Avec $SO^4H + 3\frac{1}{2}HO$ et HO (renfermant la même dose de HO^2), il ne s'est pas produit d'acide persulfurique. Enfin, le composé $S^2O^7 + 2HO^2$ étant étendu avec beaucoup d'eau, ses deux composants subsistent quelque temps; puis ils se détruisent lentement, chacun pour son propre compte. On voit par là que le composé $S^2O^7 + 2HO^2$ résulte réellement de l'action électrolytique.

» Pour achever de définir ces phénomènes, examinons la stabilité propre de l'acide persulfurique.

9. *Stabilité.* — L'acide persulfurique, abandonné à lui-même, se détruit

peu à peu et complètement. Au bout de neuf jours, par exemple, une solution renfermant 98^{mgr} d'oxygène actif (c'est-à-dire $1^{gr},1$ d'acide persulfurique S^2O^7) dans 10^{cc} n'en renfermait plus que 31^{mgr}; au bout de dix-sept jours, une solution renfermant 37^{mgr} était tombée à 5^{mgr}; au bout d'un mois, une solution renfermant 91^{mgr} était réduite à 1^{mgr}, etc. La décomposition des solutions concentrées d'acide persulfurique est plus rapide que celle des solutions aqueuses et étendues d'eau oxygénée, et que celle de l'ozone gazeux.

» Observons cependant que cette comparaison est imparfaite, les conditions dans lesquelles les trois substances ont été étudiées n'étant guère comparables. En effet, la vitesse de décomposition de l'acide persulfurique varie suivant l'agitation de la liqueur, son titre acide et la température.

» 1° En l'agitant vivement, on facilite le dégagement de l'oxygène, par suite de l'influence exercée par l'atmosphère gazeuse dans laquelle l'oxygène peut se dégager, et conformément aux expériences de M. Gernez sur les dissolutions gazeuses sursaturées. Au contraire, cette influence d'une agitation extérieure n'existe guère sur l'ozone pur, contenu dans un flacon.

» 2° L'élévation de la température active la décomposition de l'acide persulfurique, aussi bien que celle de l'eau oxygénée et de l'ozone. Cependant son influence est loin d'être instantanée : des solutions persulfuriques renfermant $0^{gr},081$ et $0^{gr},098$ d'oxygène actif et répondant à $SO^4H + 6,5HO$ ont pu être portées à 50° pendant une minute, puis lentement refroidies, sans que leur titre ait changé. Ces mêmes solutions, étendues de 20^{vol} d'eau, n'ont pas changé de titre, même lorsqu'on porta les liqueurs aqueuses à 50° pendant un moment.

» 3° La stabilité de l'acide persulfurique croît avec la dilution de l'acide total, contenu dans la liqueur. L'acide total étant $SO^4H + HO$ et renfermant $0^{gr},023$ d'oxygène actif, n'en renfermait plus, au bout de 9 jours, que des traces presque inappréciables. L'acide total, étant $SO^4H + 6HO$, a baissé pendant le même temps de $0^{gr},098$ à $0^{gr},031$.

» Enfin une portion de ce dernier acide, ayant été étendue dès l'origine avec 20 fois son volume d'eau, opération qui n'en a pas changé le titre, puis conservée pendant 9 jours, a baissé seulement de $0^{gr},098$ à $0^{gr},090$. Ces chiffres donnent une idée de la stabilité relative de l'acide persulfurique.

» **10.** Pour compléter ce sujet, il me reste à parler d'observations plus délicates encore et relatives à la formation spontanée de l'eau oxygénée (ou plutôt du composé spécial déjà signalé) dans les solutions d'acide

persulfurique, telles que $SO^4H + 6HO$, au sein desquelles l'électrolyse avait produit d'abord de l'acide persulfurique pur. Si on les conserve, au bout de 8 à 10 jours, on trouve une dose sensible d'eau oxygénée, formée en même temps que le titre total en oxygène actif a baissé.

» Par exemple, une liqueur contenant 82^{mgr} d'oxygène actif, entièrement à l'état d'acide persulfurique, ne contenait plus, après quelques jours de conservation dans un flacon clos, que 70^{mgr}, dont 9^{mgr} à l'état de HO^2. Une liqueur contenant 98^{mgr}, après neuf jours, ne renfermait plus que 31^{mgr} d'oxygène actif, dont $4^{mgr},5$ à l'état de HO^2. Une liqueur contenant 37^{mgr} d'oxygène actif était réduite, après dix-sept jours, à 5^{mgr}, dont $0^{mgr},5$ sous forme de HO^2, etc.

» Cette formation d'eau oxygénée ne paraît pas due à une réaction lente de l'eau contenue dans les liqueurs et à un équilibre résultant entre les deux composés suroxygénés, comme on aurait pu le penser d'abord. En effet, la liqueur diluée avec 20 volumes d'eau, et qui s'est conservée presque sans variation pendant neuf jours (98^{mgr} réduits à 90^{mgr}), n'a donné lieu à aucune formation appréciable d'eau oxygénée. La formation de l'eau oxygénée est donc simultanée avec la décomposition lente de l'acide persulfurique. Elle en est probablement corrélative, comme nous l'avons déjà admis plus haut pour rendre compte de sa formation par électrolyse. »

CHIMIE ORGANIQUE. — *Note sur de nouveaux dérivés de la nicotine;* par MM. A. Cahours et A. Étard.

« Dans une Note que nous avons publiée, M. Étard et moi, dans la séance du 19 mai 1879 (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 999), nous avons fait voir que, lorsqu'on chauffe progressivement la nicotine avec du soufre à une température qui ne doit pas dépasser 170°, la base organique étant employée en excès, il se formait un produit dont la composition est exprimée par la formule

$$C^{40}H^{18}Az^4S^2 = \left\{ \begin{matrix} C^{20}H^9Az^2 \\ C^{20}H^9Az^2 \end{matrix} \right\} S^2,$$

auquel nous avons donné le nom de *thiotétrapyridine*, sa formation étant analogue à celle de la thianiline. Cette substance, qui joue, de même que la nicotine, le rôle de base et forme avec les acides des combinaisons définies, nous a donné, dans son contact avec certaines substances simples

et composées, des dérivés fort intéressants que nous nous proposons de faire connaître aujourd'hui.

» En maintenant en ébullition pendant quelque temps au réfrigérant ascendant de la thiotétrapyridine bien pure avec de l'acide azotique ordinaire étendu de son volume d'eau, évaporant la liqueur acide en consistance sirupeuse et l'abandonnant à elle-même dans un endroit frais, on voit se déposer au bout de quelques jours des cristaux groupés en mamelons qui renferment de l'acide azotique en combinaison.

» Ces cristaux, redissous dans l'eau, donnent une liqueur acide qui, neutralisée, puis traitée par l'azotate d'argent, donne naissance à un dépôt floconneux blanc, renfermant 47,5 pour 100 d'argent; le calcul donne 46,9.

» Mis en suspension dans de l'eau qu'on fait traverser par un courant d'acide sulfhydrique, le précipité précédent se décompose, et l'on obtient une liqueur acide qui, débarrassée du sulfure d'argent par la filtration, abandonne par l'évaporation des cristaux parfaitement blancs, aiguillés, un peu ternes, fusibles à 228°-229°. Ce point de fusion, la proportion d'argent laissée par la calcination du sel, ainsi que l'ensemble des propriétés que présente ce produit, le caractérisent comme étant l'acide nicotianique ou carboxypyridique de Laiblin.

» Cet acide, distillé sur de la potasse ou sur de la chaux, laisse dégager en outre de la pyridine. La base sulfurée résultant de l'action du soufre sur la nicotine fournit donc de l'acide nicotianique à la manière de cette dernière.

» Les acides à radicaux pyridiques étant susceptibles de former des sels avec d'autres acides et fonctionnant eux-mêmes comme bases, nous pouvons considérer les cristaux dont nous avons parlé plus haut comme de l'azotate d'acide nicotianique. Cet azotate, chauffé dans un tube, fournit un mélange de vapeurs nitriques et nitreuses en même temps qu'un sublimé cristallin blanc. Ce même azotate, chauffé avec un excès de chaux vive, dégage de la pyridine. Les eaux mères d'où l'azotate précédent s'est déposé donnent, par l'addition d'un sel de baryte, un abondant précipité de sulfate de cette base, le soufre de la thiotétrapyridine s'étant transformé complètement en acide sulfurique par l'action de l'acide azotique.

» L'action des métaux des dernières sections, cuivre, mercure, argent, que nous avons mis en présence de la thiotétrapyridine à une température d'au moins 300°, en vue de la désulfurer et de mettre à nu les radicaux basiques qu'elle renferme, nous a fourni les résultats suivants.

» Le cuivre réduit par l'hydrogène est celui dont l'emploi nous a paru

le plus avantageux. A cet effet, on broie 10^{gr} de la base sulfurée avec 20^{gr} à 25^{gr} de cuivre; puis on introduit le mélange dans une cornue qu'on chauffe à feu nu, doucement d'abord et progressivement jusqu'au rouge sombre. On recueille dans un récipient annexé à la cornue une huile à peine colorée, bouillant à une température élevée; la cornue renferme du sulfure de cuivre mélangé d'un résidu charbonneux. Cette huile, de nature basique, bout entre 274° et 275°; elle est incolore, très peu mobile, très réfrangible, et se colore graduellement au contact de l'air. Elle ne se congèle pas à $-20°$; dans ce cas, elle devient visqueuse et prend la consistance de la glycérine. Son odeur rappelle celle de certains champignons. Sa densité à 13° est égale à 1,1245. Son pouvoir rotatoire est nul. Très peu soluble dans l'eau bouillante et s'en déposant entièrement à froid, elle se dissout facilement dans l'alcool et dans l'éther.

» Elle se dissout également avec dégagement de chaleur dans l'acide chlorhydrique, avec lequel elle forme un sel de couleur citronnée. Ce chlorhydrate ne cristallise pas et brunit fortement à l'air. La potasse et l'ammoniaque en précipitent la base. L'analyse de la base libre nous a donné les résultats suivants : $0^{gr},325$ de matière ont donné $0^{gr},195$ d'eau et $0^{gr},899$ d'acide carbonique, d'où l'on déduit pour la composition en centièmes :

Carbone	75,43
Hydrogène	6,65

» La formule $C^{20}H^{10}Az^2$ donne :

Carbone	75,94
Hydrogène	6,32

» D'après cette analyse, confirmée par celle des composés suivants, on se trouve amené à adopter pour cette base une formule identique à celle de la dipyridine, dont elle serait l'isomère et de laquelle elle se différencie par l'ensemble de ses propriétés; nous la désignerons, par suite, sous le nom d'*isodipyridine*.

» Le *chloroplatinate* préparé par précipitation du chlorhydrate se présente sous la forme de cristaux microscopiques très nets, dont la couleur rappelle celle du bichromate de potasse.

» Redissous dans l'eau, ce chloroplatinate se dépose en lamelles couleur de bichromate foncé, de plusieurs millimètres et douées de beaucoup d'éclat.

» L'analyse de ce sel, qui donne pour le platine, l'hydrogène et l'eau les

nombres 25,75, 3,2 et 4,90, conduit à la formule

$$2(C^{20}H^{10}Az^2, HCl), Pt^2Cl^4 + 2H^2O^2.$$

» Pendant la recristallisation du sel il se dépose, en même temps que les cristaux lamelleux dont nous venons de parler, une poudre ressemblant pour l'aspect à l'oxydule de cuivre, laquelle provient de la décomposition qu'éprouve le chloroplatinate au contact de l'eau bouillante. En maintenant pendant un certain temps l'ébullition de la liqueur, on augmente la proportion de ce produit. Un fait analogue a été signalé récemment par M. Baeyer à l'occasion du chloroplatinate de picoline, qui dans des circonstances analogues fournit un dérivé organique du platine représenté par la formule

$$Pt^2Cl^2 \begin{cases} C^{12}H^7AzCl \\ C^{12}H^7AzCl \end{cases}.$$

» Le *chloromercurate d'isodipyridine* se présente sous la forme de lames d'un blanc verdâtre, peu solubles dans l'eau et décomposables par elle à la manière du chloroplatinate. Sa composition est représentée par la formule

$$C^{20}H^{10}Az^2, HCl, HgCl.$$

» Le ferricyanhydrate est un beau sel qui se présente sous la forme d'aiguilles très brillantes, d'un brun verdâtre ; sa composition est représentée par la formule

$$Fe^4Cy^{12}H^6, 4(C^{20}H^{10}Az^2) + 5H^2O^2.$$

» Nous allons résumer maintenant les caractères de l'alcaloïde et de ses sels.

» A l'état libre, sa solution aqueuse précipite :

» L'azotate d'argent en blanc ;

» Le sublimé corrosif en blanc ; le précipité se redissout à chaud.

» L'acide picrique donne un sel cristallisé en petites aiguilles jaunes.

» Le chlorhydrate de la base donne :

» Avec l'eau de brome un précipité jaune;

» Avec la dissolution d'iode un précipité brun ;

» Avec le ferrocyanure de potassium un précipité jaune citron, formé de cristaux microscopiques très nets.

» Le ferricyanure ne donne pas de suite de précipité ; lorsqu'on ajoute un excès de réactif, le précipité se redissout et se dépose ensuite sous la forme de cristaux aiguillés très brillants.

» Avec le chlorure d'or on obtient un précipité brunâtre qui se redissout à chaud en donnant une liqueur d'un vert sale.

» Avec le perchlorure de fer on obtient une réaction caractéristique. Rien ne se précipite dès l'abord, mais par l'ébullition la liqueur se fonce et prend une belle teinte rouge orangé très riche.

» Le dédoublement de la base sulfurée par le cuivre en fournissant de l'isodipyridine ne peut s'expliquer qu'en admettant qu'une partie de cette base cède de l'hydrogène à l'autre, et l'on constate, en effet, la décomposition d'une partie de cette dernière.

» On constate, en outre, la formation de cette isodipyridine lorsqu'on fait agir en tubes scellés, à la température de 180°, une solution alcoolique de potasse sur la base sulfurée, condition dans laquelle on peut considérer cette solution comme hydrogénante. En prolongeant le contact entre les substances réagissantes et portant la température à 200°, on augmente la proportion d'isodipyridine.

» Bien que l'action de la chaleur, soit sur un mélange de cuivre et de la base sulfurée, soit sur un mélange de cette dernière et d'une solution alcoolique de potasse, nous ait donné de l'isodipyridine, nous ne nous serions pas crus suffisamment fondés à affirmer que cette isodipyridine fût le groupement fondamental de la nicotine, groupement autour duquel viendraient se fixer 4^{at} d'hydrogène. Afin de pouvoir être plus affirmatifs, nous avons essayé d'enlever directement 4^{at} d'hydrogène à la nicotine par oxydation et de vérifier l'équation

$$C^{20}H^{14}Az^2 + O^4 = C^{20}H^{10}Az^2 + 2H^2O^2.$$

» Laiblin, en oxydant à fond la nicotine par l'acide azotique, a, comme on sait, obtenu l'acide carboxypyridique, que nous avons obtenu de notre côté par l'action du même réactif sur la base sulfurée. En essayant d'arriver au but que nous nous proposions d'atteindre, nous nous sommes arrêtés au ferricyanure de potassium en solution alcaline. On opère sur les quantités théoriques exigées par l'équation

$$\begin{aligned} &C^{20}H^{14}Az^2 + 4(Fe^2Cy^6K^3) + 4(KHO^2) \\ &\quad = 8(FeCy^3K^2) + 4H^2O^2 + C^{20}H^{10}Az^2. \end{aligned}$$

On mélange la nicotine et la potasse, puis on ajoute assez d'eau pour obtenir une dissolution limpide; on verse alors par petites portions le ferricyanure, qui bientôt se décolore. Le liquide étant finalement soumis à la distillation, on sature les eaux distillées par l'acide chlorhydrique; on con-

centre la liqueur par évaporation, puis on précipite par la potasse le mélange des bases qu'on enlève au moyen de l'éther. En évaporant cette solution pour chasser l'éther et distillant, il passe d'abord de la nicotine inaltérée, puis, vers la fin, de l'isodipyridine.

» Les mélanges de nicotine et d'isodipyridine sont, du reste, faciles à séparer : il suffit pour cela d'ajouter assez d'eau pour produire un trouble laiteux; la nicotine, très soluble dans l'eau froide, s'y dissout en entier, tandis que l'isodipyridine, qui y est insoluble, se dépose sous la forme d'une huile. Nous avons constaté son identité parfaite avec celle qu'on obtient par la désulfuration de thiotétrapyridine. Nous nous croyons dès lors fondés à considérer l'isodipyridine comme le noyau fondamental de la nicotine, conformément à l'hypothèse que nous avons émise dans notre première Note.

» Nous proposant de rechercher les modifications que pourrait éprouver la nicotine à une température élevée, nous avons fait passer 500^{gr} de cette substance réduite en vapeur à travers un tube de fer de $1^{m},25$, rempli de fragments de porcelaine, maintenu à une température un peu supérieure à celle du rouge sombre, et communiquant avec un appareil qui permettait de condenser les vapeurs et de recueillir les gaz. Nous avons constaté qu'environ 385^{gr} à 390^{gr} de nicotine avaient échappé à la décomposition. Les cent et quelques grammes de nicotine décomposée nous ont donné 30^{lit} environ d'un gaz formé d'hydrogène libre et d'hydrocarbures appartenant à la première et à la seconde famille.

» Les produits condensés dont le point d'ébullition était inférieur à 200° se composaient d'alcaloïdes appartenant à la série pyridique; à l'aide de distillations fractionnées, nous en avons retiré 4^{gr} à 5^{gr} environ de pyridine et autant de picoline. Le produit le plus abondant que nous ayons extrait de ce mélange est une collidine bouillant entre 170° et 171°, dont le poids après purification s'élevait à environ 22^{gr} à 23^{gr}; nous nous proposons d'en fixer ultérieurement la constitution. En soumettant pareillement à des redistillations les produits qui bouillent au-dessus de 250°, nous en avons retiré de nouvelles substances basiques dont nous n'avons pu déterminer la nature, en raison de leur trop faible proportion.

» Nous nous faisons un devoir, en terminant cette Note, d'adresser nos remercîments à M. Bruère pour le concours précieux qu'il nous a prêté en préparant pour nous, dans le laboratoire que M. Schlœsing avait mis gracieusement à notre disposition, le stock assez considérable de nicotine qui a servi à nos recherches. »

BOTANIQUE. — *Évolution de l'inflorescence chez des Graminées* (IIIe Partie); *ordre d'apparition des premiers vaisseaux dans des* Phleum, Cynosurus, Poa; par M. A. Trécul.

« Dans une jeune inflorescence de *Phleum pratense*, les faisceaux du rachis sont ordonnés suivant deux arcs opposés très ouverts, qui donnent lieu à une section transversale elliptique, aux petits côtés de laquelle correspond l'insertion des rameaux, tandis qu'au milieu de chaque grande face est un faisceau primordial, le plus volumineux de l'arc. C'est dans ces deux faisceaux primordiaux que naissent les premiers vaisseaux. Dans une inflorescence haute de $2^{mm},35$, il existait en eux deux courts vaisseaux, l'un un peu plus long que l'autre, situés un peu au-dessous du milieu de la hauteur du rachis, dans le deuxième quart de celui-ci. Plus tard il naît un vaisseau dans un faisceau latéral de chaque côté des principaux. Il en est formé ensuite dans un ou deux faisceaux plus faibles opposés aux petits côtés de l'ellipse. Des faisceaux plus grêles encore et plus externes alternent ultérieurement avec les premiers. Le pédoncule encore jeune présente une disposition analogue des faisceaux centraux, avec deux séries de faisceaux plus ténus et plus externes, alternant avec les précédents.

» Dans des inflorescences de 12^{mm} à 15^{mm}, l'accroissement prédominant par en haut, les rameaux sont d'autant plus avancés et les épillets d'autant plus accusés qu'ils sont insérés plus haut; ceux d'en bas sont, par conséquent, les moins développés. Mais les vaisseaux apparaissent d'abord dans les rameaux de la région moyenne. Ainsi, dans une inflorescence de 12^{mm}, il n'y avait de vaisseaux que dans le huitième et le neuvième rameau d'un côté, et dans les dixième, onzième et douzième de l'autre côté, à compter d'en bas. Tous les rameaux placés au-dessus et au-dessous étaient dépourvus de vaisseaux (1).

» Ce premier vaisseau de chaque rameau est libre, et, sous ce rapport, le *Phleum pratense* est particulièrement intéressant, car ce vaisseau commence près du haut de l'axe secondaire, au niveau du dernier épillet latéral

---

(1) J'ai dit antérieurement que l'ordre d'accroissement des rameaux ne suit souvent pas leur ordre de naissance. Il en est de même de l'ordre d'apparition des vaisseaux dans les rameaux. Ainsi, dans le *Setaria germanica*, où les rameaux naissent manifestement de bas en haut, ce sont les rameaux de la région moyenne qui les premiers présentent des vaisseaux. Cela s'observe aussi dans les rameaux du *Setaria glauca*.

d'un côté et des deux supérieurs de l'autre. Le vaisseau s'allonge ensuite par en bas. Dans l'inflorescence du *Phleum asperum*, le premier vaisseau commence plus bas dans l'axe du rameau. Je crois devoir faire observer, mais ce n'est qu'une coïncidence, que, dans le *Phleum pratense*, la base des tout jeunes rameaux est plus largement adhérente à l'axe primaire. Ils forment d'abord une sorte de plaque adhérente que l'on voit se partager en plusieurs générations de ramules. Au moment de la naissance du premier vaisseau, leur partie libre est moins étendue que dans le *Phleum asperum*.

» L'apparition du premier vaisseau des rameaux secondaires est non moins instructive. Il naît libre aussi, celui des ramules d'en bas avant ceux des ramules supérieurs. Cependant j'ai remarqué, dans les *Phleum asperum* et *pratense*, que le vaisseau du deuxième ramule d'un côté apparaît parfois avant celui du ramule inférieur placé au-dessous. Quand les ramules secondaires sont courts, le vaisseau naît dans l'insertion même de ce ramule; quand le ramule est plus long, le vaisseau commence, au moins souvent, en haut de cet axe tertiaire, tout près de son épillet terminal (*Phleum pratense*, etc.). A un âge plus avancé, on peut suivre longuement ce premier vaisseau ou le fascicule vasculaire dont il est le début, dans l'axe du rameau-mère, où il descend librement, indépendant des autres faisceaux qui parcourent longitudinalement cet axe.

» Le *Cynosurus cristatus* et les *Poa trivialis* et *annua* forment une transition du troisième type structural au quatrième (¹), en ce que, dans le *Cynosurus*, les mérithalles inférieurs ont deux arcs opposés de trois faisceaux chacun, dans lesquels les vaisseaux naissent dans l'ordre suivant : le premier vaisseau apparaît dans le médian dorsal; le deuxième vaisseau naît dans le médian de la face antérieure; puis successivement il en est produit dans les deux faisceaux latéraux dorsaux, et ensuite dans les deux faisceaux latéraux de la face antérieure.

» Voici quelques exemples de la position longitudinale des premiers vaisseaux dans de jeunes inflorescences. Une inflorescence de $1^{mm},65$ avait un vaisseau long de $0^{mm},50$, étendu depuis la hauteur de l'aisselle du deuxième rameau latéral inférieur de la série A′ (la série A étant celle dont le rameau inférieur est le plus bas placé), jusque vers le milieu de l'inflorescence. Dans une inflorescence de $2^{mm},15$ et une autre de 3^{mm} il n'y avait qu'un seul vaisseau qui descendait seulement au niveau des rameaux inférieurs et qui montait vers les deux tiers de la première inflo-

(¹) *Voir* pour ces types aux pages 212 et 213 de ce volume.

rescence et un peu plus haut dans la deuxième. Il appartenait au faisceau dorsal médian. Le rachis d'une inflorescence de $2^{mm},75$ avait deux vaisseaux : l'un, dans le vaisseau dorsal médian, descendait jusqu'au niveau de la dernière feuille de la tige; l'autre, occupant, dans le faisceau médian antérieur, la partie inférieure du rachis, commençait au niveau de l'aisselle du rameau inférieur. Dans une autre inflorescence de $2^{mm},75$, le faisceau dorsal avait deux vaisseaux et le faisceau opposé antérieur un seul.

» Une inflorescence de $7^{mm},50$ avait, au-dessous de la région moyenne du rachis, des vaisseaux dans quatre faisceaux : 1° trois vaisseaux dans le dorsal médian; 2° deux vaisseaux dans le médian antérieur; 3° deux vaisseaux non encore striés, mais bien accusés, dans un latéral dorsal; 4° un seul vaisseau dans l'autre latéral dorsal. Un peu plus haut dans le même rachis, il n'y a de vaisseaux que dans trois faisceaux, les deux médians et un latéral dorsal; plus haut encore, dans deux faisceaux, dans le médian dorsal et dans le médian antérieur; plus haut enfin, dans le médian dorsal seul.

» Dans une inflorescence de $11^{mm},75$, il y a des vaisseaux dans six faisceaux, ordonnés suivant deux arcs opposés, dans la partie inférieure du rachis et dans son pédoncule de $0^{m},001$ de longueur, ce qui rapproche le *Cynosurus* des *Phleum;* mais plus haut cette symétrie disparaît.

» L'apparition des premiers vaisseaux des rameaux de l'inflorescence donne aussi à cette plante beaucoup d'intérêt. Ces premiers vaisseaux des rameaux commençaient à paraître dans l'inflorescence de $7^{mm},50$ citée plus haut. Il y avait dans le deuxième rameau de gauche et dans le troisième de droite (vus par la face antérieure) un court vaisseau, dont la base libre était à la hauteur de l'aisselle de chaque rameau. Dans des inflorescences plus âgées, les premiers vaisseaux des divers organes des épillets fertiles et des épillets stériles méritent aussi l'attention. On trouve que de jeunes folioles, glumes ou glumelles, peuvent avoir un vaisseau ou même un fascicule près du sommet, tandis qu'à la base il n'existe pas encore de vaisseau. Dans des folioles plus âgées, ce fascicule plus fort s'allonge par en bas, tandis qu'à la partie inférieure de l'organe apparaît un court vaisseau, libre aussi par les deux bouts. Dans des organes un peu plus avancés les deux fragments vasculaires sont réunis, mais leur base commune peut encore être libre, ou bien elle est réunie à un faisceau du rameau. D'autre part, l'axe de l'épillet fertile constitue une sorte de sympode, dont chaque mérithalle est terminé par une fleur. Il n'est pas rare de trouver indépendant le premier vaisseau de chaque mérithalle; il ne s'unit qu'un peu plus tard au faisceau du mérithalle précédent. Enfin, les étamines de chaque fleur ont

des vaisseaux d'abord libres, comme ceux d'étamines que j'ai citées.

» Dans le *Poa annua*, l'ellipse suivant laquelle sont distribués les faisceaux du rachis sur la coupe transversale n'est point partagée en deux arcs opposés, comme dans les plantes du troisième type. Cependant j'ai obtenu quelquefois, dans la partie inférieure du rachis du *Poa trivialis*, six faisceaux dont la disposition imitait, à un certain degré, celle des faisceaux des *Phleum*, et mieux celle des six faisceaux de la partie inférieure du rachis du *Cynosurus cristatus*, quoique la symétrie fût moins parfaite que dans ce dernier. Mais le plus souvent, dans le *Poa annua*, on obtient, dans la région inférieure, cinq faisceaux, à l'intérieur desquels apparaissent successivement les vaisseaux, dans l'ordre que j'ai indiqué à la page 213.

» L'étude longitudinale de ces premiers vaisseaux est très instructive, à cause de la facilité de l'observation. L'inflorescence a souvent cinq rameaux de chaque côté, quelquefois six ou quatre seulement. Ce sont ceux de la région moyenne qui les premiers acquièrent des vaisseaux (inflorescences de $3^{mm},15$ ou environ), et les rameaux d'en haut en ont avant les inférieurs (inflorescences de $3^{mm},65$ et de $4^{mm},25$).

» Le premier vaisseau de l'inflorescence entière, ai-je dit, naît dans le faisceau dorsal du rachis; il en occupe la région moyenne. Les inflorescences qui le présentaient ainsi avaient de $1^{mm},35$ à $1^{mm},65$ de hauteur.

» Ce vaisseau s'allonge par en haut et par en bas. Par en haut il atteint l'épillet terminal, et sur lui s'insèrent plus tard les premiers vaisseaux des rameaux supérieurs. Par en bas il descend dans la tige proprement dite, où il se bifurque ou même se trifurque au voisinage des feuilles supérieures, comme je le dirai plus loin. On voit quelquefois ce premier vaisseau commençant sur deux points à la fois, par deux courts segments qui bientôt se réunissent : l'un naît dans la région moyenne, l'autre au-dessous du rudiment de l'épillet terminal.

» Le deuxième vaisseau du rachis, qui naît dans un faisceau de la face antérieure, reçoit à son sommet ordinairement le vaisseau premier-né de la base du troisième rameau de la série A, c'est-à-dire dont l'inférieur est le plus bas placé de tous. Plus rarement c'est le premier vaisseau du quatrième rameau ou celui du deuxième qui s'ajuste à son extrémité; cela varie avec le nombre des rameaux de l'inflorescence ([1]). On a donc alors

---

([1]) S'il y a cinq rameaux de chaque côté de l'inflorescence, c'est ordinairement le premier vaisseau du troisième rameau qui se superpose au deuxième vaisseau du rachis. S'il y a six rameaux de chaque côté de celui-ci, ce peut être le premier vaisseau du quatrième

un vaisseau continu du rachis dans ce rameau. D'autre part, sur lui vient s'insérer le premier vaisseau d'un ou de deux rameaux de la région moyenne de l'autre série, c'est-à-dire de la série A'.

» Dans les rameaux inférieurs de cette inflorescence, qui les derniers obtiennent des vaisseaux, les premiers de ceux-ci commencent toujours librement à leur base, et constituent un bel exemple à citer sous ce rapport; ils s'allongent par en haut dans le rameau correspondant, et par en bas ils descendent directement dans la tige-mère, où on les suit souvent jusqu'au niveau de la deuxième ou de la troisième feuille en descendant, ou bien ils vont s'insérer sur l'un des vaisseaux ou fascicules dépendant d'un rameau plus haut placé.

» La branche inférieure d'un rameau d'en bas est souvent fixée près de l'insertion même de ce rameau; alors son premier vaisseau peut aller s'insérer sur un faisceau du rachis autre que celui qui descend du rameau auquel il appartient. D'un autre côté, les rameaux secondaires ou tertiaires insèrent le plus communément leur premier vaisseau sur celui du rameau qui les porte. Je reviendrai plus loin sur ce sujet. Examinons d'abord la conduite de ces vaisseaux ou fascicules vasculaires du rachis, à leur arrivée dans la partie supérieure de la tige, que termine l'inflorescence.

» Une coupe transversale du pédoncule ou mérithalle inférieur d'une inflorescence encore jeune a présenté quelquefois quatre faisceaux vasculaires opposés deux à deux, avec quatre autres fascicules naissants, alternes avec eux; mais plus souvent il y a cinq faisceaux principaux, nés successivement, comme je l'ai dit, et dans lesquels le groupe vasculaire est de moins en moins développé, selon leur âge relatif.

» En suivant ces vaisseaux ou fascicules vasculaires par en bas, on les voit s'épaissir et souvent se bifurquer au niveau de la première, de la deuxième ou de la troisième feuille, en descendant, et s'unir d'une part à un faisceau de cette feuille, et d'autre part à un autre faisceau de l'inflorescence ou à une de ses branches, et ensemble se prolonger en un faisceau interposé à deux faisceaux du mérithalle sous-jacent. Quelquefois deux branches d'un même faisceau de l'inflorescence sont ainsi étendues chacune dans un intervalle de deux faisceaux de ce mérithalle.

» Là, à l'insertion de la deuxième ou de la troisième feuille, tous les faisceaux se renflent considérablement par la multiplication de leurs élé-

---

rameau; s'il n'y a que quatre rameaux, ce peut être le premier vaisseau du deuxième, qui s'appose à l'extrémité de ce deuxième vaisseau du rachis.

ments vasculaires, en sorte qu'il en résulte une fusion ou un lacis des faisceaux de la feuille et de l'inflorescence. Le même épaississement et la même fusion s'opèrent à l'insertion de la feuille placée au-dessus, et ensuite de la dernière, s'il y en a encore une plus haut. Une telle union des faisceaux s'accomplit, en général, à l'insertion de chaque feuille dans cette famille. Le *Glyceria fluitans* m'a aussi donné de beaux exemples du commencement de ce renflement dû à la multiplication des éléments vasculaires, où l'on voyait le renflement débuter par la juxtaposition de courtes séries de cellules vasculaires s'ajoutant à l'entour d'un vaisseau de récente formation, dont je parlerai plus tard.

» De même que le premier vaisseau du rachis primaire naît quelquefois sur deux points à la fois, de même on trouve parfois, dans les rameaux primaires, le premier vaisseau commençant simultanément aussi sur deux points, près de l'insertion et plus haut, au-dessous de l'épillet le plus élevé. Ces deux parties vasculaires se réunissent, et sur ce premier vaisseau s'insèrent les premiers vaisseaux des ramules latéraux. Il y a donc sous chaque épillet d'abord un vaisseau auquel s'en ajoutent bientôt d'autres ; ce fascicule, primitivement simple, se bifurque sous les glumes, et ses branches sont dirigées vers la base de celles-ci. Déjà avant cette bifurcation, on peut trouver un peu plus haut, sous la première fleur, un vaisseau du réceptacle, indépendant des autres, et en même temps, ou parfois auparavant, un vaisseau libre aussi dans le deuxième mérithalle de l'épillet. Ces vaisseaux, ou le fascicule dont ils sont le début, s'insèrent sur la fourche sous-glumaire, où se fait une assez grande multiplication de cellules vasculaires. Un vaisseau, ordinairement libre d'abord, se fait ainsi successivement dans chaque article du sympode qui constitue l'épillet (inflorescences de 7^{mm} et plus); cependant on trouve quelquefois que le vaisseau d'un mérithalle donné est déjà inséré sur le vaisseau du mérithalle précédent, quand ce dernier est encore libre par la base. Assez souvent aussi ces premiers vaisseaux mérithalliens sont unis de bonne heure à ceux qui sont au-dessous, en sorte que le dernier formé peut être le seul libre.

» Dans le *Poa annua*, les vaisseaux des filets des étamines naissent libres aussi par la base, indépendants les uns des autres et de ceux du faisceau réceptaculaire; ils existent même avant qu'un vaisseau soit apparu dans les glumes et dans les glumelles. En outre, il m'est arrivé de trouver que la glume inférieure (la petite) ne présentait pas de vaisseau quand la glume supérieure (la grande) en avait un commençant un peu au-dessous du sommet de la nervure médiane. Et dans des glumes plus avancées il peut

exister des vaisseaux au sommet et à la base de la nervure médiane, quand il n'y en a pas encore dans la région moyenne.

» Des deux glumelles, c'est l'externe ou inférieure qui la première possède des vaisseaux; mais, ainsi que je viens de le dire, les étamines en ont avant les glumelles, et, dans la fleur inférieure, elles en sont pourvues avant les glumes. Je citerai d'autres exemples de ce fait. »

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur les diviseurs des fonctions cyclotomiques;* par M. SYLVESTER.

« Soit k un nombre quelconque; formons la série

$$\cos\lambda_1 \frac{2\pi}{k}, \quad \cos\lambda_2 \frac{2\pi}{k}, \quad \ldots, \quad \cos\lambda_i \frac{2\pi}{k}.$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ étant les $\frac{1}{2}\varphi(k)$ nombres premiers à k et moindres que $\frac{k}{2}$. Le produit de tous les facteurs $x - 2\cos\lambda \frac{2\pi}{k}$ est ce que l'on nomme une *fonction cyclotomique*, et k sera nommé son indice. En effet, la fonction cyclotomique en x à l'indice k est ce que devient le facteur primitif de $t^k - 1$ quand on le divise par $t^{\frac{1}{2}\varphi(k)}$ et que l'on écrit $t + \frac{1}{t} = x$. A l'indice 1 ou 2 ne correspond aucune fonction cyclotomique, et pour les indices 3, 4, 6, la fonction cyclotomique est linéaire, et conséquemment ne peut posséder aucune propriété arithmétique.

» Je distingue les diviseurs de ces fonctions en deux classes. Les nombres qui divisent la fonction sans diviser l'indice se nomment *diviseurs extérieurs* ou *extrinsèques*, ceux qui divisent en même temps une fonction et son indice se nomment *diviseurs intérieurs* ou *intrinsèques*.

» Voici les théorèmes que j'ai réussi à établir concernant ces diviseurs.

» Quant à la première classe, je démontre :

» 1° Que tout nombre dont les facteurs premiers diminués ou augmentés de l'unité sont divisibles par l'indice d'une fonction cyclotomique est diviseur de cette fonction. Je fais dépendre la démonstration de cette proposition du théorème suivant, qui est, pour ainsi dire, la clef de la théorie entière :

» *En posant*

$$J(\cos\vartheta) = \cos(p^i\vartheta) - \cos(p^{i-1}\vartheta),$$

J (cos ϑ), *regardé comme fonction algébrique de* cos ϑ, *est divisible par* p^i *pour toute valeur réelle et entière attribuée à* cos ϑ.

» La proposition précédente est une conséquence immédiate de ce théorème, quand on met $z\cos\vartheta = x$ et qu'on substitue, pour la congruence

$$J(\cos\vartheta) \equiv 0 \quad [\text{mod.}\ p^i],$$

la congruence équivalente

$$\left(t^{p^i - p^{i-1}} - 1\right)\left(t^{p^i + p^{i-1}} - 1\right) \equiv 0 \quad [\text{mod.}\ p^i];$$

de sorte que, a étant un nombre réel quelconque, il faut que l'un ou l'autre des deux facteurs $a^{p^i - p^{i-1}} - 1$, $a^{p^i + p^{i-1}} - 1$ soit toujours divisible par p^i, car, si les deux facteurs contenaient p, on aurait $a^{2p^i} - 1$ divisible par p; c'est-à-dire, puisque $2p^i = 2 + \left(2\frac{p^i - 1}{p - 1}\right)(p - 1)$, $a^2 - 1$ serait divisible par p, et conséquemment $a = \pm 1 + \lambda p$, auquel cas $t^{pi-1} \equiv (\pm 1)$ mod. p^i, et les deux facteurs deviennent respectivement congrus à $(\pm 1)^{pi \pm pi-1} - 1$, c'est-à-dire tous les deux congrus à zéro par rapport à ce module, et par conséquent tous les deux divisibles par p^i et congrus à zéro. Avec l'exception de ces valeurs de a, c'est toujours l'un des deux facteurs exclusivement qui s'évanouit pour une valeur donnée de a.

» 2° Je démontre, à l'aide du même théorème de forme trigonométrique, mais en faisant $i = 1$, que si un diviseur extérieur d'une fonction cyclotomique, disons ψ_k, est de la forme $mk \pm e$, k étant son indice, la congruence

$$\psi_k \equiv 0 \quad [\text{mod.}\ mk \pm e]$$

aura deux racines congrues l'une à l'autre, à moins que $e = 1$. On prouve facilement que cette équivalence est impossible avec l'aide du petit principe additionnel que, si ψ est congru à zéro selon un module quelconque, $\frac{d\psi}{dx}$ sera congru à zéro selon le même module.

» Quant à la seconde classe des diviseurs, je démontre que, laissant à part les fonctions cyclotomiques linéaires $x + 1$, x, $x - 1$ appartenant aux indices 3, 4, 6 et la fonction quadratique qui répond à l'indice 12, il n'y a *au plus* qu'*un seul* diviseur intérieur (un nombre premier); bien entendu, la première puissance seulement de ce nombre. J'ai déjà dit que, pour que p^j soit un diviseur extérieur, il faut et il suffit que $p = mk + \varepsilon$, k étant l'indice et $\varepsilon = \pm 1$. Or, pour que p soit diviseur intérieur de la fonction

cyclotomique à l'indice k, je démontre qu'il faut et qu'il suffit que k soit de la forme

$$\frac{p-\varepsilon}{m}p^j.$$

» En général, il n'y a *au plus* qu'une seule manière de mettre un indice k, donné sous la forme qui met en évidence un diviseur intérieur; mais, quand $k=12$, on peut écrire $m=1, j=2, p=2, \varepsilon=-1$ ou bien $m=1, j=1, p=3$, $\varepsilon=-1$; c'est pourquoi ψ_{12} possède les *trois* diviseurs intérieurs 2, 3, 6. En démontrant que la condition donnée plus haut pour que p soit diviseur intérieur est nécessaire et que la première puissance seulement de p est un diviseur de la fonction, je me sers du même théorème trigonométrique qu'auparavant et en même temps de la seconde proposition sur les facteurs extérieurs. Pour démontrer que cette condition est suffisante, j'ai recours à un théorème purement algébrique, savoir, que si $k=k_1(mk_1\pm 1)^y$, $mk_1\pm 1$ étant un nombre premier p, le résultant des deux équations $\psi_k=0$, $\psi_{k_1}=0$ est égal à $p^{\frac{1}{2}\varphi(k_1)}$, en me servant en même temps d'un second petit principe, qu'afin que deux congruences soient satisfaites simultanément par rapport au même module, le résultant algébrique de ces congruences transformées en équations doit être congru à zéro par rapport au module.

» La fonction cyclotomique à l'indice 9, x^3-3x+1, m'a amené à faire cette recherche; car j'avais grandement besoin de démontrer apodictiquement (ce que j'avais établi par des épreuves numériques sans fin) que les diviseurs de cette fonction sont 3 et les nombres premiers de la forme $18n\pm 1$ exclusivement. C'est à l'aide de ce théorème que je démontre qu'aucun nombre A de la forme

$$pq,\ p^2q^2,\ p_1p_2^2,\ q_1q_2^2;\quad 9pq,\ 9p^2q^2,\ 9p_1p_2^2,\ 9p_1q_2^2,$$

où chaque p désigne un nombre premier de la forme $18n-5$ et chaque q un nombre premier de la forme $18n+7$, ne peut être décomposé en une somme ou différence de deux cubes rationnels. En effet, je démontre facilement que, si cette décomposition était possible, l'équation

$$x^3-3xy^2+y^3=3Az^3$$

serait résoluble en nombres entiers, ce qui est impossible, puisque x^3-3x+1 ne contient aucun p ou q. La même équation, en mettant $A=3$, devrait avoir lieu aussi si 3 était décomposable en deux cubes rationnels; ainsi on voit (comme on sait déjà) que cette décomposition est impossible, puisque x^3-3x+1 ne contient pas le diviseur intérieur 9. »

S. M. DON PEDRO adresse, de Rio-Janeiro, une dépêche télégraphique annonçant la découverte d'une grande comète, dont on poursuit les observations.

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

MÉCANIQUE. — *Equations des petites oscillations d'un fil inextensible en mouvement dans l'espace.* Note de M. H. LÉAUTÉ, présentée par M. Rolland.

(Commissaires : MM. Rolland, Phillips, Resal.)

« Les équations du mouvement d'une courbe funiculaire assujettie à rester plane ont été établies par M. Resal [1]; je me propose de trouver ces équations dans le cas, très important pour les applications, où la corde, étant tout d'abord en mouvement permanent dans l'espace, est légèrement écartée de sa position de repos apparent.

» Soient

μ la masse de l'unité de longueur de corde;

x, y, z, μT les coordonnées rectangulaires d'un point de cette corde et la tension en ce point dans le mouvement permanent;

s et t les deux variables indépendantes représentant la longueur d'arc et le temps;

X, Y, Z les composantes de la force extérieure sur l'unité de masse au point (x, y, z);

x_1, y_1, z_1, T_1, X_1, Y_1, Z_1 les variations de x, y, z, T, X, Y, Z lorsqu'on écarte la corde de sa position de repos apparent.

» D'après les équations générales du mouvement d'une corde, on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right),\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right),\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right),\end{aligned}\right.$$

avec la condition

$$(2)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right) + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

qui exprime l'inextensibilité de la corde.

---

[1] RESAL, *Comptes rendus*, t. LXXV, p. 1010; *Traité de Mécanique générale*, t. I, p. 321.

» On a aussi

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2(x+x_1)}{dt^2} &= \mathrm{X}+\mathrm{X}_1+\frac{d}{ds}\left[(\mathrm{T}+\mathrm{T}_1)\frac{d(x+x_1)}{ds}\right], \\ \frac{d^2(y+y_1)}{dt^2} &= \mathrm{Y}+\mathrm{Y}_1+\frac{d}{ds}\left[(\mathrm{T}+\mathrm{T}_1)\frac{d(y+y_1)}{ds}\right], \\ \frac{d^2(z+z_1)}{dt^2} &= \mathrm{Z}+\mathrm{Z}_1+\frac{d}{ds}\left[(\mathrm{T}+\mathrm{T}_1)\frac{d(z+z_1)}{ds}\right], \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left[\frac{d(x+x_1)}{ds}\right]^2+\left[\frac{d(y+y_1)}{ds}\right]^2+\left[\frac{d(z+z_1)}{ds}\right]^2=1.$$

» On déduit des équations (3) et (4), en tenant compte des équations (1) et (2) et en supposant les quantités x_1, y_1, z_1, T_1 assez petites pour pouvoir négliger les termes du second ordre par rapport à elles ou à leurs dérivées,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= \mathrm{X}_1+\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dx_1}{ds}+\mathrm{T}_1\frac{dx}{ds}\right), \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= \mathrm{Y}_1+\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dy_1}{ds}+\mathrm{T}_1\frac{dy}{ds}\right), \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} &= \mathrm{Z}_1+\frac{d}{ds}\left(\mathrm{T}\frac{dz_1}{ds}+\mathrm{T}_1\frac{dz}{ds}\right), \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \frac{dx}{ds}\frac{dx_1}{ds}+\frac{dy}{ds}\frac{dy_1}{ds}+\frac{dz}{ds}\frac{dz_1}{ds}=0.$$

» Si l'on désigne par V la vitesse commune à tous les points de la corde dans le mouvement permanent et si l'on pose

$$s+\mathrm{V}t=\sigma,$$
$$\mathrm{T}-\mathrm{V}^2=\varpi,$$

les équations précédentes deviennent

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= \mathrm{X}_1+\frac{d}{d\sigma}\left(\varpi\frac{dx_1}{d\sigma}+\mathrm{T}_1\frac{dx}{d\sigma}\right)-2\mathrm{V}\frac{d^2x_1}{d\sigma\, at}, \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= \mathrm{Y}_1+\frac{d}{d\sigma}\left(\varpi\frac{dy_1}{d\sigma}+\mathrm{T}_1\frac{dy}{d\sigma}\right)-2\mathrm{V}\frac{d^2y_1}{d\sigma\, dt}, \\ \frac{d^2z_1}{dt^2} &= \mathrm{Z}_1+\frac{d}{d\sigma}\left(\varpi\frac{dz_1}{d\sigma}+\mathrm{T}_1\frac{dz}{d\sigma}\right)-2\mathrm{V}\frac{d^2z_1}{d\sigma\, dt}, \end{aligned}\right.$$

$$(8)\quad \frac{dx}{d\sigma}\frac{dx_1}{d\sigma}+\frac{dy}{d\sigma}\frac{dy_1}{d\sigma}+\frac{dz}{d\sigma}\frac{dz_1}{d\sigma}=0.$$

» Les quantités x_1, y_1, z_1 peuvent être regardées comme les coordonnées d'un point du fil par rapport à des axes animés d'un mouvement de

translation et dont l'origine M parcourt la courbe de repos apparent avec la vitesse constante V; remplaçons ces axes par d'autres dirigés à chaque instant suivant la tangente $M\alpha$, la binormale $M\beta$ et la normale principale $M\gamma$ à cette courbe de repos apparent. De plus, remarquons, pour simplifier les calculs, que la direction des premiers axes est quelconque et peut être changée sans que la forme des équations (7) et (8) soit modifiée; nous pourrons donc imaginer, pour un moment, que les anciens axes sont parallèles aux nouveaux à l'instant considéré et pour le point que l'on envisage.

» Les équations (7) et (8) deviennent alors, en désignant par ρ et r les rayons de première et de seconde courbure de la courbe de repos apparent et par A_1, B_1, C_1 les accroissements des composantes de la force accélératrice suivant $M\alpha$, $M\beta$ et $M\gamma$,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= A_1 - \varpi\frac{\omega}{\rho} + \frac{dT_1}{d\sigma},\\ \frac{d^2\beta}{dt^2} &= B_1 + \frac{d\varpi}{d\sigma}\psi + \varpi\left(\frac{d\psi}{d\sigma} - \frac{\omega}{r}\right) - 2V\frac{d\psi}{dt},\\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= C_1 + \frac{d\varpi}{d\sigma}\omega + \varpi\left(\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\psi}{r}\right) - 2V\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_1}{\rho},\end{aligned}\right.$$

$$(10)\quad \frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,$$

avec les conditions

$$\frac{d\beta}{d\sigma} - \frac{\gamma}{r} = \psi,$$

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\beta}{r} = \omega.$$

» Telles sont les équations des petites oscillations d'une corde en mouvement dans l'espace. Pour passer au cas du mouvement plan, il suffit de faire infini le rayon de seconde courbure r.

» On obtient alors

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= A_1 - \varpi\frac{\omega}{\rho} + \frac{dT_1}{d\sigma},\\ \frac{d^2\beta}{dt^2} &= B_1 + \frac{d}{d\sigma}\left(\varpi\frac{d\beta}{d\sigma}\right) - 2V\frac{d^2\beta}{d\sigma\,dt},\\ \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= C_1 + \frac{d}{d\sigma}(\varpi\omega) - 2V\frac{d\omega}{dt} + \frac{T_1}{\rho},\end{aligned}\right.$$

$$\frac{d\alpha}{d\sigma} - \frac{\gamma}{\rho} = 0,$$

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} + \frac{\alpha}{\rho} = \omega.$$

» Une remarque importante doit être faite ici. Si B_1 ne dépend que de β et si A_1 et C_1 en sont indépendants, la seconde des équations (11) ne contient pas l'accroissement de tension T_1 et elle est la seule qui renferme la variable β. Or β, qui est dirigé suivant la perpendiculaire au plan de la courbe, représente ce que l'on peut appeler l'*oscillation latérale*. On voit donc que, dans ce cas, ces oscillations n'influent en rien sur la tension, et il est évident que la réciproque est vraie.

» Ce théorème, qui est applicable aux transmissions télodynamiques, puisque A_1, B_1 et C_1 sont alors nuls, nous montre que, dans ces transmissions, les oscillations latérales du câble n'ont pas d'influence sur la régularité du mouvement, et que, réciproquement, les changements de tension produits par les inégalités de vitesse des poulies ne peuvent donner lieu directement à des oscillations latérales. »

M. **Tamin-Despalles** prie l'Académie de renvoyer au concours des prix de Médecine et Chirurgie (fondation Montyon) son Ouvrage intitulé « Oxythérapie et Azothérapie ».

(Renvoi à la future Commission.)

CORRESPONDANCE.

M. le **Secrétaire perpétuel** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance, l' « Album de Statistique graphique (Ire Partie) » publié par M. *Cheysson*.

(Renvoi à la Commission des prix de Statistique.)

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques*. Note de M. E. **Picard**, présentée par M. Hermite.

« J'ai eu l'honneur de communiquer, il y a quelque temps déjà, à l'Académie une proposition relative aux équations linéaires du second ordre à coefficients doublement périodiques. Une circonstance singulière pouvait dans certains cas se présenter, qui rendait le résultat moins net. Je me permets de revenir aujourd'hui sur ce théorème pour le présenter sous une forme plus complète.

» Considérons l'équation différentielle

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$$

où p et q sont des fonctions doublement périodiques (aux périodes $2K$ et $2iK'$) et dont nous supposerons l'intégrale générale uniforme; on admet d'ailleurs que l'équation n'a que des intégrales régulières.

» Soit $f(x)$ une intégrale quelconque de l'équation précédente; on aura évidemment

$$f(x+4K) = Af(x) + Bf(x+2K),$$
$$f(x+4iK') = A'f(x) + B'f(x+2iK'),$$

les A et les B étant des constantes. On pourra donc trouver au moins une constante μ telle que l'expression

$$\varphi(x) = f(x+2K) + \mu f(x),$$

se reproduise à un facteur constant près par le changement de x en $x+2K$. On aura évidemment

$$\varphi(x+4iK') = A'\varphi(x) + B'\varphi(x+2iK').$$

» Par suite, on pourra trouver au moins une constante μ' telle que l'expression

$$\psi(x) = \varphi(x+2iK') + \mu'\varphi(x)$$

se reproduise à un facteur constant près par le changement de x en $x+2iK'$; $\psi(x)$ est donc une fonction doublement périodique de seconde espèce; elle est d'ailleurs une intégrale de l'équation, et nous arrivons alors à cette conclusion, que l'équation (1) admet nécessairement comme intégrale une fonction doublement périodique de seconde espèce.

» $\psi(x)$ étant une intégrale de l'équation précédente, une seconde intégrale sera

$$y = \psi(x)\int \frac{dx}{\psi^2(x)} e^{-\int p\,dx}.$$

» Étudions la forme de cette fonction. L'intégrale générale de (1) étant supposée uniforme, $e^{-\int p\,dx}$ sera une fonction doublement périodique de seconde espèce, et, par suite, la fonction

$$F(x) = \frac{1}{\psi^2(x)} e^{-\int p\,dx}$$

sera une fonction de même nature. Or on a, sauf dans un cas particulier, que je laisse de côté pour le moment,

$$F(x) = \Sigma[Af(x-a) + \ldots + A_\alpha D^\alpha f(x-a)],$$

en posant $f(x) = \frac{H(x+\omega)}{H(x)} e^{\lambda x}$.

» Ici tous les premiers coefficients A seront nuls, puisque l'intégrale $\int F(x)dx$ est supposée uniforme; celle-ci, et par conséquent y, seront dès lors des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, et, par suite, l'intégrale générale de l'équation (1) est la somme de deux fonctions de cette nature.

» Si les multiplicateurs μ et μ' de $F(x)$ peuvent être mis sous la forme

$$\mu = e^{2K\lambda}, \quad \mu' = e^{2K'i\lambda},$$

$F(x)$ subit dans son développement un changement de forme analytique, et, comme l'a indiqué récemment M. Mittag-Leffler (*Comptes rendus*, séance du 26 janvier 1880), on doit poser

$$F(x) = a_0 e^{\lambda x} + \Sigma[Af(x-a) + A_1 Df(x-a) + \ldots + A_\alpha D^\alpha f(x-a)],$$

où $f(x) = \frac{H'(x)}{H(x)} e^{\lambda x}$; on a d'ailleurs

$$\Sigma(A + A_1\lambda + \ldots + A_\alpha \lambda^\alpha) e^{-\lambda a} = 0.$$

» Ici tous les premiers coefficients A doivent être nuls pour la même raison que précédemment, et, en supposant d'abord λ différent de zéro, on a

$$\int F(x)dx = \frac{a_0}{\lambda} e^{\lambda x} + \Sigma[A_1 f(x-a) + \ldots + A_\alpha D^{\alpha-1} f(x-a)].$$

» Mais on a alors

$$\Sigma(A_1 + \ldots + A_\alpha \lambda^{\alpha-1}) e^{-\lambda a} = 0,$$

et, par suite, $\int F(x)dx$, du moins pour une valeur convenable de la constante d'intégration, est encore une fonction de seconde espèce et la conclusion précédente subsiste. Le seul cas d'exception est celui où $\lambda = 0$, c'est-à-dire quand $F(x)$ est une fonction de première espèce; on a alors dans $\int F(x)dx$ un terme en x, car

$$\int F(x)dx = a_0 x + \sum\left[A_1 \frac{H'(x-a)}{H(x-a)} + \ldots + A_\alpha D^{\alpha-1} \frac{H'(x-a)}{H(x-a)}\right].$$

» Les considérations précédentes montrent donc bien nettement, et dans tous les cas possibles, la forme des intégrales de l'équation (1). »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les séries hypergéométriques de deux variables, et sur des équations différentielles linéaires aux dérivées partielles.* Note de M. **Appell**, présentée par M. Bouquet.

« I. Soit k un entier positif; je désigne le produit $\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)$ par (λ, k) et je conviens que $(\lambda, 0) = 1$. Je considère les quatre séries

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) &= \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n, \\ F_2(\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma', x, y) &= \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n, \\ F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, x, y) &= \sum \frac{(\alpha, m)(\alpha', n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n, \\ F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) &= \sum \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m+n)}{(\gamma, m)(\gamma', n)(1, m)(1, n)} x^m y^n, \end{aligned}\right.$$

la sommation s'étendant aux valeurs entières de m et n de 0 à l'infini. Les quatre fonctions ainsi définies satisfont respectivement aux équations différentielles suivantes, dans lesquelles les lettres p, q, r, s, t désignent les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$$F_1\ \left\{\begin{aligned} &(x-x^2)r + y(1-x)s + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ &(y-y_2)t + x(1-y)s + [\gamma - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0; \end{aligned}\right.$$

$$F_2\ \left\{\begin{aligned} &(x-x^2)r - xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \beta y q - \alpha\beta z = 0, \\ &(y-y^2)t - xys + [\gamma' - (\alpha+\beta'+1)y]q - \beta' x p - \alpha\beta' z = 0; \end{aligned}\right.$$

$$F_3\ \left\{\begin{aligned} &(x-x^2)r + ys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p - \alpha\beta z = 0, \\ &(y-y^2)t + xs + [\gamma - (\alpha'+\beta'+1)y]q - \alpha'\beta' z = 0; \end{aligned}\right.$$

$$F_4\ \left\{\begin{aligned} &(x-x^2)r - y^2 t - 2xys + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]p \\ &\qquad\qquad - (\alpha+\beta+1)yq - \alpha\beta z = 0, \\ &(y-y^2)t - x^2 r - 2xys + [\gamma' - (\alpha+\beta+1)y]q \\ &\qquad\qquad - (\alpha+\beta+1)xp - \alpha\beta z = 0. \end{aligned}\right.$$

» II. Considérons, d'une manière générale, des équations simultanées de la forme

$$(2)\qquad r = a_1 s + a_2 p + a_3 q + a_4 z, \quad t = b_1 s + b_2 p + b_3 q + b_4 z,$$

les a et les b étant des fonctions de x et y. Supposons que la quantité $1 - a_1 b_1$ ne soit pas nulle identiquement et que la condition d'intégrabilité $\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial x}$ soit remplie identiquement, c'est-à-dire quels que soient x, y, z, p, q, s. Dans ces conditions, on peut démontrer la proposition suivante :

» Soit x_0, y_0 un système de valeurs des variables x et y tel que, pour des valeurs de ces variables voisines de x_0 et y_0, les coefficients des équations (2) soient holomorphes, et que la quantité $1 - a_1 b_1$ ne soit pas nulle pour $x = x_0$, $y = y_0$; on pourra satisfaire aux équations (2) par une fonction de x et y holomorphe dans le voisinage des valeurs x_0, y_0, les valeurs de cette fonction et des trois dérivées p, q, s étant arbitraires pour $x = x_0$, $y = y_0$.

» Ce théorème se déduit facilement d'un théorème sur les équations aux différentielles totales démontré par M. Bouquet (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. III, p. 265). Il suffit, pour cela, de prendre pour inconnues auxiliaires p, q, s et de former le système d'équations aux différentielles totales auquel satisfont les fonctions z, p, q, s des variables x et y. Il résulte du théorème précédent que l'on peut appliquer aux équations différentielles telles que (2) un certain nombre des propositions de M. Fuchs sur les équations différentielles ordinaires. On peut encore remarquer que ce théorème ne s'applique pas aux équations F_1 pour lesquelles la quantité $1 - a_1 b_1$ est nulle identiquement; mais il s'applique aux trois autres groupes d'équations.

» III. On peut, à l'aide des séries (1), former des polynômes de deux variables possédant des propriétés analogues à celles des polynômes de Jacobi. Je vais indiquer ici la propriété fondamentale des polynômes déduits de la série F_2. Ajoutons membre à membre les équations F_2; nous avons

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x - x^2)r + (y - y^2)t - 2xys \\ &\quad + [\gamma - (\alpha + \delta + 1)x]p + [\gamma' - (\alpha + \delta + 1)y]q - \alpha\delta z = 0, \end{aligned} \right.$$

en faisant $\beta + \beta' = \delta$. Soient z une fonction quelconque satisfaisant à cette équation unique (3), et z_1 une fonction satisfaisant à l'équation

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x - x^2)r_1 + (y - y^2)t_1 - 2xys_1 + [\gamma - (\alpha + \delta + 1)x]p_1 \\ &\qquad + [\gamma' - (\alpha + \delta + 1)y]q_1 - (\alpha - \lambda)(\delta + \lambda)z_1 = 0, \end{aligned} \right.$$

obtenue en changeant, dans (3), α en $\alpha - \lambda$ et δ en $\delta + \lambda$. Multiplions l'équation (3) par z_1, l'équation (4) par $-z$ et ajoutons; nous obtenons

une équation que l'on peut écrire

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}[x^{\gamma} y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}(P-Px-Qy)] \\ +\dfrac{\partial}{\partial y}[x^{\gamma-1} y^{\gamma'}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}(Q-Px-Qy)] \\ =\lambda(\delta-\alpha+\lambda)x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'}zz_1, \end{cases}$$

en posant $P = pz_1 - zp_1$, $Q = qz_1 - zq_1$. Supposons maintenant que les deux fonctions z et z_1 soient des polynômes et que l'on ait

$$\gamma > 0, \quad \gamma' > 0, \quad \alpha + \delta - \gamma - \gamma' > 0.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (5) par $dx\,dy$, et prenons l'intégrale double étendue à l'aire du triangle formé par les droites ayant pour équations $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$. Les intégrales du premier membre sont nulles et, par suite, on a

$$\iint x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha+\delta-\gamma-\gamma'} zz_1\, dx\,dy = 0,$$

à condition que

$$(6)\qquad \lambda(\delta-\alpha+\lambda) \gtrless 0.$$

On voit que cette condition (6) exprime que les polynômes z et z_1 sont de degrés différents, en remarquant que, si l'équation (3) est vérifiée par un polynôme de degré k, on a $(\alpha + k)(\delta + k) = 0$.

» On peut exprimer à l'aide de la fonction F_2 les polynômes que M. Hermite a indiqués comme généralisation des polynômes de Legendre et des polynômes $\cos(n \arccos x)$ (voir *Comptes rendus*, t. LX) et qui ont été étudiés par Didon (t. V, VI, VII des *Annales de l'École Normale*). Il est à remarquer aussi que l'équation bien connue à laquelle satisfait la fonction Y_n se ramène à la forme (3) par la substitution $\sin\theta \cos\varphi = \sqrt{x}$, $\sin\theta \sin\varphi = \sqrt{y}$.

» J'aurai prochainement l'honneur de présenter à l'Académie un Mémoire sur les théories précédentes, dont je n'ai fait qu'indiquer les points principaux et que l'on peut généraliser en augmentant le nombre des variables ou l'ordre des équations différentielles. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques.* Note de M. **Mittag-Leffler**, présentée par M. Hermite.

« Dans deux Notes qui ont été communiquées à l'Académie ([1]), M. Picard a donné ce théorème remarquable :

» *Si*

$$\frac{dy^{n}}{dx^{n}} = p_1 \frac{dy^{(n-1)}}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{dy^{(n-2)}}{dx^{n-2}} + \ldots + p_n y$$

est une équation différentielle linéaire à coefficients doublement périodiques telle qu'il existe toujours une intégrale uniforme, alors l'équation admet en général *pour intégrale la somme de n fonctions doublement périodiques de seconde espèce.*

» Il paraît pourtant que la méthode par laquelle M. Picard a obtenu cette forme de l'intégrale dans le cas *général* ne suffit pas pour donner la forme plus particulière dont l'intégrale est susceptible dans des cas spéciaux.

» Je me propose dans cette Note de compléter le théorème de M. Picard de la manière suivante. Je montre que *l'équation différentielle linéaire à coefficients doublement périodiques*

$$\frac{dy^{(n)}}{dx^{n}} = p_1 \frac{dy^{(n-1)}}{dx^{(n-1)}} + p_2 \frac{dy^{(n-2)}}{dx^{(n-2)}} + \ldots + p_n y$$

a toujours une intégrale $y = \psi(x)$ telle que

$$\psi(x + 2K) = \mu\,\psi(x), \quad \psi(x + 2iK') = \nu\,\psi(x).$$

Cette proposition étant établie, et en supposant que l'intégrale $y = \psi(x)$ est connue et que les coefficients de l'équation différentielle proposée sont tels que les intégrales soient toujours des fonctions uniformes avec le seul point singulier essentiel $x = \frac{1}{0}$, on peut toujours et sans exception, par les méthodes connues, obtenir les $n - 1$ intégrales qui, réunies à $\psi(x)$, forment un système fondamental.

» Soit $f(x)$ une intégrale quelconque. Alors $f(x + 2K)$, $f(x + 4K)$, ... sont aussi des intégrales, et l'on a, par conséquent,

$$f(x + 2mK) = A_1 f(x) + A_2 f(x + 2K) + \ldots + A_m f[x + 2(m - 1)K],$$

([1]) *Comptes rendus*, séances des 21 juillet 1879 et 19 janvier 1880.

où l'on peut toujours supposer A_1 différent de zéro et $m \leqq n$. Je fais, d'après M. Picard,

$$\varphi(x) = f[x + 2(m-1)K] + \mu_1 f[x + 2(m-2)K] + \ldots + \mu_{m-1} f(x),$$

et je choisis les constantes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$ de telle manière, que les équations

$$A_m + \mu_1 = \frac{A_{m-1} + \mu_2}{\mu_1} = \ldots = \frac{A_2 + \mu_{m-1}}{\mu_{m-2}} = \frac{A_1}{\mu_{m-1}} = \mu$$

soient satisfaites, ce qui est toujours possible. On a donc

$$\varphi(x + 2K) = \mu \varphi(x).$$

Mais la fonction $\varphi(x)$ est une intégrale de l'équation différentielle proposée aussi bien que $f(x)$, et l'on a, par conséquent,

$$\varphi(x + 2m'iK') = A'_1 \varphi(x) + A'_2 \varphi(x + 2iK') + \ldots + A'_m \varphi[x + 2(m'-1)iK'],$$

où, comme plus haut, $A' \lesseqgtr 0$ et $m' \leqq n$. En écrivant

$$\psi(x) = \varphi[x + 2(m'-1)iK'] + \nu_1 \varphi[x + 2(m'-2)iK'] + \ldots + \nu_{m'-1} \varphi(x),$$

où les constantes $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m'-1}$ sont telles qu'on a

$$A'_{m'} + \nu_1 = \frac{A'_{m'-1} + \nu_2}{\nu_1} = \ldots = \frac{A'_2 + \nu_{m'-1}}{\nu_{m'-2}} = \frac{A'_1}{\nu_{m'-1}} = \nu,$$

on obtient

$$\psi(x + 2iK') = \nu \psi(x),$$

de même que

$$\psi(x + 2K) = \mu \psi(x). \text{ »}$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la loi de réciprocité de Legendre étendue aux nombres non premiers*; par M. A. GENOCCHI. (Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

« Dans un Mémoire *Sur la théorie des résidus quadratiques* présenté à l'Académie royale de Belgique (séance du 6 novembre 1852), j'ai donné une démonstration élémentaire et très simple de la loi de réciprocité de Legendre. Elle se fondait sur un lemme connu de Gauss et sur le théorème d'Arithmétique suivant :

» *Soient m et n deux nombres impairs premiers entre eux. Faisons*

$$p = \frac{m-1}{2}, \quad q = \frac{n-1}{2}, \quad r = \frac{mn-1}{2},$$

$$u = nh - mk, \quad v = nh + mk - r,$$

soit h un nombre entier inférieur à $\frac{m}{2}$, *et donnons à k successivement toutes les valeurs* 1, 2, ..., *q. Ayant divisé nh par n, soit h' le reste positif : le nombre des valeurs positives de v sera égal à celui des valeurs positives de u si le reste h' est inférieur à* $\frac{1}{2}m$ *et le surpassera d'une unité dans le cas contraire.*

» J'avais rencontré un théorème plus général en exposant sous différentes formes la démonstration si remarquable de la loi de réciprocité, publiée par M. Liouville en 1847, et j'ai ensuite démontré, d'une manière directe, cet énoncé particulier.

» Or le lemme de Gauss a été généralisé comme il suit par M. Schering :

» *Soient* A *et* P *deux nombres entiers et* P *premier à* 2A ; *si l'on divise par* P *les produits*

$$1A,\ 2A,\ 3A,\ \ldots,\ \frac{P-1}{2}A,$$

en prenant les restes les plus petits en valeur absolue, et qu'on appelle μ *le nombre des restes négatifs, on aura*

$$\left(\frac{A}{P}\right)=(-1)^{\mu},$$

suivant la notation de Legendre généralisée par Jacobi.

» Au moyen de ce nouveau lemme, nous allons démontrer la loi de réciprocité étendue à deux nombres impairs, même composés, qui soient premiers entre eux.

» Retenons, en effet, les dénominations de notre énoncé, et, de plus, soient f le nombre total des valeurs positives de u, g le nombre total des valeurs positives de v, en supposant que h aussi prenne successivement toutes les valeurs 1, 2, ..., p. Divisons les multiples nh par m et les multiples mk par n, prenons les restes les plus petits en valeur absolue, et nommons n_1 le nombre des restes négatifs pour les multiples nh, et m_1 le nombre des restes négatifs pour les multiples mk. On aura, d'après notre théorème,

$$g-f=n_1,$$

et de même, en posant $u'=mk-nh$, et nommant f' le nombre des valeurs positives de u', on aura

$$g-f'=m_1,$$

et par suite

$$2g-f-f'=m_1+n_1.$$

Mais les valeurs positives de u' sont les négatives de u, en sorte que $f+f'$

est le nombre total des valeurs de u, savoir pq. On a donc

$$m_1 + n_1 = 2g - pq, \quad \text{d'où} \quad (-1)^{m_1+n_1} = (-1)^{pq},$$

et, comme le lemme de M. Schering donne

$$(-1)^{m_1} = \left(\frac{m}{n}\right), \quad (-1)^{n_1} = \left(\frac{n}{m}\right),$$

on trouve la loi dont il s'agit :

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}\frac{n-1}{2}}.$$

» M. Kummer, en 1859, et M. Kronecker, en 1875, ont remarqué que la loi de réciprocité pour les résidus quadratiques avait été découverte par Euler. Les premières tentatives pour la démontrer sont dues à Legendre ; mais la première démonstration rigoureuse et complète a été donnée par Gauss qui, après avoir trouvé le théorème par une simple induction, en 1795, a employé une année tout entière à chercher sa démonstration. Des démonstrations plus simples ont été trouvées depuis par Gauss et par d'autres, mais on ne saurait assurer qu'il pouvait être facile de découvrir ces démonstrations, car elles s'appuient sur le lemme de Gauss dont nous avons fait mention, et ce lemme a été démontré par Gauss dans l'hiver 1806-1807, comme nous l'apprend sa Lettre à Sophie Germain, publiée par M. le prince Boncompagni ; d'ailleurs, on ne sait si les autres auteurs auraient pu par eux-mêmes parvenir à ce lemme ou s'en dispenser. Dans une Lettre à Olbers, de septembre 1805, Gauss s'entretient d'une autre proposition qu'il connaissait depuis quatre années sur une simple induction, mais dont la démonstration l'a tourmenté pendant un si long espace de temps, que pas une semaine ne s'écoulait sans qu'il s'en occupât. Après quatre années d'efforts, il parvint à une démonstration, et toutefois cette proposition découle d'une manière fort simple de formules connues sur les séries trigonométriques, comme je l'ai montré dans mon Mémoire ci-dessus rappelé. Ainsi, rien n'est plus certain qu'un fait plusieurs fois affirmé par Euler et par Gauss, savoir que, surtout dans la théorie des nombres, l'induction amène la découverte de vérités dont la démonstration est très difficile et pour longtemps élude tous les efforts, et que les méthodes les plus simples sont ordinairement les dernières à se présenter. Euler a même publié sur ce sujet un Mémoire étendu dont le titre est : *Specimen de usu observationum in Mathesi pura.* »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'impossibilité de la relation algébrique* $X^n + Y^n + Z^n = 0$; par M. A. KORKINE. (Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

« Dans le numéro du 29 décembre 1879 des *Comptes rendus*, M. R. Liouville a donné une démonstration de l'impossibilité de satisfaire à l'équation

(1) $$X^n + Y^n + Z^n = 0$$

par des polynômes X, Y, Z, que je modifie en la présentant comme il suit.

» Lorsqu'il est possible de satisfaire à l'équation (1), au moyen de trois fonctions entières de t dont aucune ne se réduit à zéro, on peut toujours supposer que ces fonctions, prises deux à deux, n'ont pas de facteurs communs. Soit Z celui des trois polynômes dont le degré m n'est pas inférieur à ceux des deux autres. On voit alors facilement que le degré de l'un au moins des polynômes X et Y est aussi égal à m.

» Soit Y ce polynôme de degré m, X sera de degré $m - \lambda$, λ étant un entier positif ou nul.

» En différentiant, par rapport à t, l'équation

$$\left(\frac{Y}{X}\right)^n + \left(\frac{Z}{X}\right)^n + 1 = 0,$$

on obtient

$$Y^{n-1}(XY' - YX') = Z^{n-1}(ZX' - XZ').$$

» Il résulte de cette équation, Y et Z n'ayant pas de facteurs communs, que les expressions

$$\frac{XY' - YX'}{Z^{n-1}}, \quad \frac{ZX' - XZ'}{Y^{n-1}}$$

sont égales à une fonction entière ou au moins à une constante différente de zéro.

» Or, comme les degrés des numérateurs ne surpassent pas $2m - \lambda - 1$, ceux des dénominateurs étant $m(n-1)$, il suit que la différence

$$2m - \lambda - 1 - m(n-1)$$

est nulle ou positive, c'est-à-dire qu'on a

$$m(3-n) \geqq \lambda + 1,$$

et par conséquent $n < 3$.

» Il se trouve ainsi démontré que le cas connu de résolubilité, celui où $n = 2$, est unique, si l'on fait abstraction du cas de $n = 1$, où la solution est évidente. »

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur l'approximation des fonctions circulaires au moyen de fonctions algébriques.* Note de M. **Laguerre**, présentée par M. Hermite.

« 1. Les équations dont toutes les racines sont réelles constituent à bien des égards, dans l'ensemble des équations algébriques, une classe particulièrement importante, et les problèmes qui s'y rattachent sont souvent susceptibles de solutions simples auxquelles échappent les cas plus généraux.

» Je rappellerai, par exemple, comment le théorème de Fourier suffit, dans ce cas, pour déterminer le nombre des racines comprises entre deux nombres donnés. Des faits analogues se présentent dans la recherche de la valeur approchée des racines, et je mentionnerai notamment la proposition suivante :

» *En désignant par $f(x) = 0$ une équation dont toutes les racines sont réelles et par α une quantité arbitraire, les deux valeurs de x déterminées par l'équation*

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{-f'(\alpha) \pm \sqrt{(n-1)^2 f'^2(\alpha) - n(n-1) f(\alpha) f''(\alpha)}}{n f(\alpha)}$$

sont respectivement comprises entre α et les deux racines de l'équation proposée qui avoisinent α.

» La quantité qui figure ici sous le radical est, à un facteur numérique près, le hessien du polynôme $f(x)$ et a, comme on le sait, une valeur toujours positive.

» De là résulte, pour les racines des équations qui jouissent de la propriété indiquée, une méthode d'approximation spéciale qui permet, avec toute sûreté et sans discussion préalable, d'approcher indéfiniment de la racine immédiatement supérieure ou immédiatement inférieure à un nombre donné. L'approximation est notamment plus grande que celle fournie par la méthode de Newton, surtout quand les racines sont resserrées dans un intervalle assez étroit.

» 2. Parmi les équations qui ont toutes leurs racines réelles, il convient même de distinguer celles dont le premier membre est un polynôme satis-

faisant à une équation linéaire du second ordre, et, pour le montrer par un exemple, je considérerai ceux qui ont été étudiés par M. Hermite dans sa Note *Sur un nouveau développement en série des fonctions* (*Comptes rendus*, 8 février 1864).

» Soient α et β deux racines consécutives de l'équation $U_n = 0$; elles comprennent une racine λ de l'équation $U_{n+1} = 0$, et le polynôme U_{n+1} satisfait à l'équation

$$(1) \qquad U''_{n+1} - xU'_{n+1} + (n+1)U_{n+1} = 0.$$

» De la proposition que j'ai énoncée plus haut on déduit aisément, si l'on remarque que U_n est égal à un facteur près à U'_{n+1},

$$\alpha + \sqrt{-\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{U''_{n+1}(\alpha)}{U_{n+1}(\alpha)}} < \lambda \quad \text{et} \quad \beta - \sqrt{-\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{U''_{n+1}(\beta)}{U_{n+1}(\beta)}} > \lambda.$$

On a d'ailleurs, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{U''_{n+1}(\alpha)}{U_{n+1}(\alpha)} = \frac{U''_{n+1}(\beta)}{U_{n+1}(\beta)} = -\frac{1}{n+1};$$

il en résulte

$$\alpha + \frac{1}{\sqrt{n}} < \lambda \quad \text{et} \quad \beta - \frac{1}{\sqrt{n}} > \lambda,$$

et par suite

$$\beta - \alpha > \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

» On peut ainsi, sans former l'équation aux carrés des différences et en s'appuyant seulement sur l'équation différentielle à laquelle satisfait U_{n+1}, trouver une limite supérieure de la différence entre deux racines consécutives de l'équation $U_n = 0$.

» 3. Comme deuxième application, je considérerai l'équation

$$f(x) = 1 - \cos\alpha - n^2(1-x) + \frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{n(n+1)}{1.3}(1-x)^2 - \ldots,$$

dont la plus grande racine est $\cos\frac{\alpha}{n}$. Cette quantité étant voisine de l'unité, je partirai de la valeur initiale $+1$; on trouve aisément

$$f(1) = 1 - \cos\alpha, \quad f'(1) = n^2, \quad f''(1) = \frac{n^2(n^2-1)}{3},$$

d'où la valeur approchée suivante :

$$(2) \qquad \cos\frac{\alpha}{n} = 1 - \frac{1-\cos\alpha}{n + (n-1)\sqrt{n^2 - \frac{n(n+1)}{2}(1-\cos\alpha)}}.$$

» Cette formule donne une solution d'un problème intéressant de Géométrie élémentaire : *Partager approximativement, avec la règle et le compas, un arc donné en n parties égales.*

» On voit, en effet, que le second membre ne renferme qu'un radical carré et d'autre quantité transcendante que $\cos\alpha$.

» Je ferai, en particulier, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ dans la relation précédente; on en déduit

$$\cos\frac{\pi}{3n} = 1 - \frac{1}{2n + (n-1)\sqrt{\frac{2n(5n-1)}{3}}},$$

et j'observe que cette formule approximative, établie pour des valeurs entières de n, peut être évidemment encore employée (sauf vérification) pour des valeurs quelconques de n supérieures à l'unité; en y faisant, par exemple, $n = \frac{6}{5}$, on obtient pour $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$ la valeur rationnelle $\frac{9}{14}$, ou, en décimales, $0,642857\ldots$. La véritable valeur étant $0,642788\ldots$, l'erreur commise est plus petite que $0,00007$.

» Le calcul précédent détermine approximativement le côté de l'ennéagone régulier étoilé; on voit qu'il est sensiblement égal aux $\frac{9}{7}$ du rayon. En prenant cette valeur dans un cercle ayant un rayon de 1^m, l'erreur commise sur la longueur du côté est plus petite que $\frac{1}{7}$ de millimètre.

» 4. Je ferai encore, dans la formule (2), $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$\cos\frac{\pi}{2n} = 1 - \frac{1}{n + (n-1)\sqrt{\frac{n(2n-1)}{3}}}$$

et, en posant $x = \frac{1}{n}$,

$$\cos\frac{\pi x}{2} = 1 - \frac{x^2}{x + (1-x)\sqrt{\frac{2-x}{3}}}. \tag{3}$$

» Cette formule n'est justifiée que pour $x = \frac{1}{n}$ et n étant un entier au moins égal à 2; mais, si l'on remarque qu'elle donne des résultats exacts pour $x = 1$ et $x = \frac{2}{3}$, on en conclut qu'elle doit donner une assez grande approximation pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et $+1$.

» Pour donner une idée de l'approximation qu'elle comporte, je transcris ci-après une Table donnant, pour un certain nombre de valeurs de l'angle

$\frac{\pi x}{2}$, la valeur des cosinus calculés au moyen de la formule (3) et leur véritable valeur; quand ces quantités sont exprimées en décimales, les quatre premières décimales sont exactes.

Angles.	Valeur du cosinus calculée par la formule (3).	Valeur exacte du cosinus.	Angles.	Valeur du cosinus calculée par la formule (3).	Valeur exacte du cosinus.
0°....	1	1	50°....	0,6428	0,6428
9....	0,9877	0,9877	54....	0,5878	0,5878
18....	0,9512	0,9511	60....	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
24....	0,9137	0,9135	70....	0,3422	0,3420
30....	0,8662	0,8660	75....	0,2591	0,2588
40....	0,7661	0,7660	80....	0,1739	0,1736
45....	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	85....	0,0874	0,0872
			90....	0	0

PHYSIQUE. — *Sur de nouvelles franges d'interférence.* Note de M. **Gouy**, présentée par M. Desains.

« Les phénomènes d'interférence que l'on étudie d'ordinaire sont produits par le concours de deux ondes lumineuses. Mais cette condition n'est pas nécessaire, et la théorie indique la possibilité de produire des franges d'interférence au moyen d'une seule onde, pourvu que la forme de cette onde soit telle que, d'un point extérieur, on puisse lui mener deux ou plusieurs normales distinctes. On en connaît déjà un exemple : ce sont les *arcs surnuméraires* qui accompagnent parfois l'arc-en-ciel, et dont la théorie a été donnée par M. Airy [1]. C'est aussi à cette classe qu'appartiennent les franges que je vais décrire.

» L'expérience est ainsi disposée : un collimateur et une lunette sont placés dans le prolongement l'un de l'autre; leur axe commun est horizontal. Entre l'objectif du collimateur et celui de la lunette, on place une auge de verre à faces planes, parallèles et verticales. L'auge est d'abord à demi pleine d'eau; au moyen d'un entonnoir capillaire, on amène à sa partie inférieure une solution saline, et on laisse la diffusion s'opérer pendant quelques minutes.

» Supposons maintenant la lunette ajustée pour l'infini, la fente du

[1] *Transactions of the Society of Cambridge.*

collimateur placée horizontalement, et éclairée avec de la lumière homogène. Nous verrons dans le champ de la lunette un rectangle lumineux, formé de belles franges horizontales, alternativement brillantes et obscures. La frange inférieure est la plus large et la plus brillante; elle se raccorde avec le fond obscur qui est au-dessous d'elle par une dégradation insensible. A partir de cette frange et en remontant, on trouve une série de franges dont l'intervalle diminue suivant une loi régulière. Avec une fente étroite et un bon éclairage, le rectangle lumineux se résout ainsi tout entier en franges très fines, mais parfaitement nettes; on peut en distinguer plusieurs centaines. Ce rectangle est limité, à sa partie supérieure, par l'image de la fente, qui peut d'ailleurs disparaître si la diffusion est un peu avancée [1].

» En arrêtant une partie de l'onde incidente au moyen d'un écran dont le bord horizontal se trouve à une hauteur convenable, on fait disparaître les franges, qui sont remplacées par un éclairement continu.

» On peut se rendre compte de la manière suivante de l'ensemble du phénomène. Grâce à la diffusion, l'auge est pleine d'un liquide dont l'indice n, constant sur un même plan horizontal, varie continûment avec la hauteur h; de plus, la dérivée $\frac{dn}{dh}$ passe par un maximum, en valeur absolue, pour une certaine hauteur. L'onde plane sortie du collimateur n'est plus plane après avoir traversé l'auge, mais forme une nappe cylindrique à génératrices horizontales, dont la directrice présente un point d'inflexion vers la hauteur où $\frac{dn}{dh}$ devient maximum; par suite, les normales à l'onde parallèles à une direction donnée ont leurs pieds sur deux droites horizontales situées, l'une au-dessous, l'autre au-dessus du point d'inflexion. L'action de l'onde sur un point très éloigné, dans la direction donnée, se réduit, d'après un théorème connu, aux actions de deux bandes étroites comprenant les horizontales que l'on vient de définir. Chacune de ces bandes envoie un mouvement lumineux au point considéré, et, comme elles sont inégalement distantes de ce point, ces deux mouvements y arriveront dans des temps inégaux, et pourront interférer.

---

[1] On peut observer ces franges dans des conditions différentes, en inclinant la fente du collimateur; elles sont parallèles à la fente et conservent leurs caractères généraux. Ces franges obliques sont d'une netteté parfaite, mais exigent une mise au point rigoureuse, tandis que, avec la fente horizontale, les franges sont toujours aussi distinctes quel que soit le tirage de la lunette. Lorsqu'on allonge beaucoup celle-ci, on voit apparaître, au haut du champ, un second système de franges analogue au premier, mais disposé en sens inverse.

» J'ajouterai que ces franges peuvent recevoir une application utile : par suite des progrès de la diffusion, elles se déplacent assez rapidement, et offrent ainsi, pour l'étude de la diffusion elle-même, une méthode très sensible, que je me propose de soumettre à quelques essais. »

CHIMIE GÉNÉRALE. — *Sur la densité de quelques gaz à une haute température.* Note de M. **J.-M. Crafts**, présentée par M. Friedel.

« Dans une Note présentée dans la séance du 26 janvier, j'ai décrit une modification du procédé de M. V. Meyer pour la détermination de la densité des vapeurs, qui m'a permis d'opérer avec des gaz permanents, ce qui n'est pas possible avec la méthode originale. Avant de faire des expériences avec le chlore, j'avais essayé d'observer les densités relatives d'autres gaz, afin de contrôler le procédé. Je demande à l'Académie la permission de lui communiquer ces résultats, qui font voir dans quelles limites la méthode est applicable.

» Un avantage précieux de l'admirable méthode de M. Meyer consiste dans la facilité avec laquelle on peut reconnaître quand l'expérience se passe d'une manière irrégulière. En observant le dégagement du gaz qui se rend dans l'éprouvette graduée, on apprend vite à estimer si la substance dont on cherche la densité de vapeur n'a pas été chauffée suffisamment, ou bien si elle a subi une décomposition par suite d'une trop grande élévation de température. Ce dernier cas se présente d'une manière frappante avec l'ammoniaque, quand on la chauffe fortement. Si l'on transvase 10^{cc} de ce gaz dans un cylindre rempli d'azote pur et chauffé à $1300°$, au premier moment $10^{cc},3$ d'azote sont déplacés, mais le volume du gaz qui sort du cylindre augmente rapidement pour devenir égal à $11^{cc},5$, après sept ou huit minutes. Si l'on renverse l'expérience et qu'on déplace l'ammoniaque par l'azote, il reste assez du premier gaz dans le cylindre chauffé pour donner lieu au même phénomène de décomposition avec augmentation de volume. Du reste, en faisant passer un courant rapide d'ammoniaque à travers le cylindre en porcelaine fortement chauffé, on observe la décomposition bien connue de ce gaz en azote et hydrogène.

» On voit que dans ce cas on obtient d'abord une densité presque normale, avant que les résultats soient faussés par la décomposition, qui demande un certain temps pour s'accomplir; ainsi on peut quelquefois

saisir un chiffre, qui représente probablement la vraie densité, avant qu'une réaction secondaire ait eu lieu.

» En opérant avec des gaz qui ne donnent lieu à aucune réaction anomale, on est frappé de la rapidité avec laquelle le volume total que l'on veut mesurer devient fixe; par exemple, en déplaçant l'air à 1350° par l'air froid, on peut opérer le transvasement et faire la lecture dans une minute, et, après ce court délai, le volume que l'on veut mesurer reste constant. Il y a sans doute un échange partiel de chaleur entre le gaz qui entre et celui qui sort, mais les changements de température qui se font par contact avec les parois du vase et surtout pendant le passage à travers les tubes capillaires doivent contribuer plus puissamment encore à amener le gaz à une température stationnaire; en effet, il suffit que 23^{gr} de verre perdent un degré de chaleur pour élever de 1300° la température de 10^{cc} d'un gaz quelconque.

» J'ai essayé d'appliquer cette méthode à déterminer la tension de dissociation d'un gaz qui se forme avec condensation de ses éléments constituants; mais la plus haute température du fourneau Perrot ne permet pas d'apprécier ce phénomène dans le cas que j'ai choisi, l'acide carbonique. Dans une série d'expériences, 10^{cc} de ce gaz ont déplacé $10^{cc},03$, $10^{cc},01$, 10^{cc}, $10^{cc},03$, $9^{cc},95$ et $10^{cc},09$ d'azote. Quand le cylindre en porcelaine est rempli d'acide carbonique, 10^{cc} d'azote déplacent $9^{cc},95$, $9^{cc},91$, $9^{cc},98$ et $9^{cc},93$.

» Il est évident que ce qu'on détermine dans ces expériences n'est autre chose que le coefficient relatif de dilatation des deux gaz sur lesquels on opère à une température fixe et connue approximativement, et les résultats avec l'acide carbonique correspondent avec le coefficient 0,003675 entre zéro et 1350°, au lieu de 0,00371 qu'on trouve entre zéro et 100°. (On prend le coefficient de l'azote à 0,00367.)

» L'hydrogène, qui se distingue tellement des autres gaz par ses propriétés physiques, a été comparé avec l'azote vers 1350°, et les résultats semblent indiquer un coefficient de dilatation, plus fort pour ce dernier; mais ils sont compliqués par le phénomène de diffusion de l'hydrogène à travers les parois fortement chauffées du cylindre en porcelaine, de sorte qu'on ne peut pas obtenir des données précises.

» Cette question de l'imperméabilité de la porcelaine a attiré, dès le début, mon attention, et j'ai essayé à plusieurs reprises les vases qui servaient aux expériences, et toujours avec le même résultat; la porcelaine

de Bayeux fortement chauffée s'est trouvée poreuse pour l'hydrogène et aussi pour les vapeurs d'eau, mais non pas pour les autres gaz. Je me hâte de dire que je n'ai eu à ma disposition que six cylindres (fabrication de M. Gosse), et que tous ont eu leur émail fortement attaqué par les chauffages à flamme nue avec le gaz d'éclairage. Ces conditions sont peu semblables à celles réalisées dans les recherches classiques de M. Sainte-Claire Deville, qui chauffait ses ballons dans un moufle avec un combustible qui ne produisait pas d'eau par sa combustion.

» La quantité d'eau qui pénètre dans les cylindres est très petite, $0^{gr},001$ à $0^{gr},002$ par heure, et l'on peut facilement remplir les vases d'un gaz sec au moment de commencer une expérience, ce qui permet de faire disparaître cette cause d'erreur.

» La densité de l'acide chlorhydrique présente un intérêt particulier, en raison d'une des hypothèses ([1]) que MM. Meyer ont proposées comme explication possible de la densité qu'ils attribuent au chlore.

» Le chlore serait composé d'un élément qui n'a pas été isolé, le murium, combiné avec l'oxygène. A une température au-dessus de 1200°, $2(M^2O^2)$ deviendrait $2(M^2O) + O^2$. L'acide chlorhydrique pourrait avoir une densité anomale, si l'on admet cette hypothèse et que l'on suppose l'hydrogène combiné avec le murium ou avec l'oxygène devenu libre à la température où la dissociation a lieu. On a trouvé dans les expériences suivantes une densité normale pour l'acide chlorhydrique à la plus haute température du fourneau.

» 10^{cc} de ce gaz déplacent $10^{cc},03$; $9^{cc},93$; $9^{cc},93$; $9^{cc},97$ d'azote; 10^{cc} d'azote déplacent $9^{cc},73$; $9^{cc},61$; $9^{cc},68$; $9^{cc},63$; $9^{cc},73$ d'acide chlorhydrique. En employant l'air au lieu d'azote, on obtient $0^{cc},2$ ou $0^{cc},3$ de

---

([1]) Dans une séance de la Société chimique de Zurich du 21 juillet 1879, M. V. Meyer a parlé de ses vues théoriques, mais il s'est gardé de les poser comme définitives, et il ne les a publiées qu'en partie dans le *Bulletin de la Société chimique de Berlin*. M. Watson Smith a jugé à propos de les communiquer à un journal anglais (*Chemical News*, t. XXXIX, p. 49). On trouve dans ce compte rendu le développement de l'hypothèse sur le murium et le récit d'un fait, que M. Meyer apporte en confirmation de ses vues. Il a obtenu de l'oxygène en chauffant fortement le chlore et il croit que ce résultat peut être dû à une dissociation du chlore. Quoiqu'il admette que ses vases sont imperméables et qu'ils ne sont pas attaqués par le chlore, il n'a pas trouvé les autres produits de la dissociation. Je ne voudrais pas intervenir dans l'étude de cette question difficile, et je me borne à signaler le passage des vapeurs d'eau à travers les parois du cylindre en porcelaine comme source possible d'oxygène, suivant la réaction partielle $H^2O + Cl^2 = 2HCl + O$.

moins, probablement parce que l'oxygène réagit sur l'acide chlorhydrique.

» Les gaz dans ces expériences ont été mesurés sur le mercure sec, mais on a observé une diminution de volume qui peut s'élever à 1^{cc} ou 2^{cc} dans une heure. Cette perte n'influe pas notablement sur les résultats, mais elle rend hasardeuses des conclusions tirées des petites différences de densité qu'on a observées. »

THERMOCHIMIE. — *Action de l'eau sur le fluorure de silicium et sur le fluorure de bore; dissolution du cyanogène dans l'eau.* Note de M. H. **Hammerl**, présentée par M. Berthelot.

« I. *Fluorure de silicium.* — J'ai déterminé la chaleur dégagée par la réaction du fluorure de silicium sur l'eau, réaction par laquelle le fluorure de silicium est décomposé en silice et en acide hydrofluosilicique dissous.

» La méthode employée est celle de M. Berthelot (*Essai de Mécanique chimique fondée sur la Thermochimie*, t. I, p. 234); j'ai fait passer le gaz dans un cylindre de verre mince, placé dans le calorimètre et rempli aux trois quarts d'eau distillée.

» La chaleur dégagée par la réaction d'un équivalent ($SiF^4 = 104^{gr}$) sur un excès d'eau a été trouvée :

	Cal
I	+ 21,76
II	+ 22,61
III	+ 22,48
IV	+ 22,49
Moyenne	22,34

» L'eau a absorbé dans ces expériences onze ou douze fois son volume de fluorure de silicium.

» II. *Fluorure de bore.* — La décomposition par l'eau du fluorure de bore en acide borique et en acide hydrofluoborique m'a fourni, dans quatre expériences, les nombres suivants (pour $1^{éq} BF^3 = 68^{gr}$) :

	Cal
I	+ 24,52
II	+ 24,26
III	+ 24,81
IV	+ 24,47
Moyenne	24,51

» Le volume du gaz absorbé était, pour 1^cc d'eau, dans deux expériences 65^cc et dans les autres 33^cc.

» *Cyanogène.* — Pour mesurer la chaleur dégagée par la dissolution de cyanogène dans l'eau, j'ai fait arriver le gaz dans une fiole de verre mince contenant environ 500^cc à 600^cc d'eau; c'est la méthode de M. Berthelot (*Essai de Mécanique chimique fondée sur la Thermochimie*, t. I, p. 219). Le cyanogène était évalué par la pesée de la fiole. J'ai trouvé pour la chaleur de dissolution (rapportée à $C^2Az = 26^{gr}$) de ce gaz dans l'eau les nombres

	Cal
I	+ 3,62
II	+ 3,26
III	+ 3,32
Moyenne	3,4

ou + 6,8 pour le volume moléculaire $22^{lit},3$.

» Ces nombres, quoique assez concordants, sont sujets à quelque réserve, à cause de la faible quantité de gaz dissous (1^{gr} en moyenne) et de la lenteur relative de la dissolution.

» Observons cependant que leur ordre de grandeur est comparable à celui de la chaleur de dissolution des gaz qui ne forment pas avec l'eau de composé stables, tels que le brome (+ 8, 3) et le chlore (+ 3,0), entre lesquels le cyanogène est compris; l'acide sulfhydrique (+ 4,7), l'acide carbonique (+ 5,6), l'acide cyanhydrique (+ 6,1), etc., ces gaz étant tous rapportés à un même volume moléculaire.

» Tous ces nombres sont analogues aux chaleurs de liquéfaction, sans cependant leur être identiques, mais ils sont fort surpassés par les chaleurs de dissolution des gaz qui forment avec l'eau des combinaisons chimiques stables : c'est ce que confirment mes expériences sur les fluorures de bore et de silicium [1]. »

MINÉRALOGIE. — *Reproduction de l'amphigène.* Note de M. P. HAUTEFEUILLE, présentée par M. Daubrée.

« On sait que la méthode imaginée par MM. Fouqué et Michel Lévy pour la préparation des feldspaths permet d'obtenir l'amphigène; celle que j'ai donnée pour effectuer les reproductions de l'orthose, de l'albite et de

[1] Ce travail a été fait au laboratoire de M. Berthelot, au Collège de France.

l'oligoclase se prête également à la cristallisation de ce silico-aluminate naturel. Le vanadate de potasse, qui peut, ainsi que je l'ai déjà indiqué, remplacer les tungstates et les phosphates alcalins dans la préparation des feldspaths, fournit en effet des cristaux qui ont la forme et la composition de l'amphigène toutes les fois que le mélange de silice et d'alumine traité par le vanadate contient une forte proportion d'alumine.

» L'étude cristallographique de la forme de ce silicate a été faite sur des cristaux obtenus en maintenant au rouge, dans un creuset de platine, de l'aluminate et du vanadate de potasse avec des fragments cohérents de silice fortement calcinée. Les réactions qui déterminent la cristallisation commencent dès que les fragments de silice sont attaqués. Les premiers cristaux formés sont très petits; ils grossissent en empruntant leurs éléments à la silice, cédée lentement par les fragments, et à l'aluminate, toujours en excès dans le sel fondu. L'action du vanadate peut être prolongée avec avantage, même après la disparition de la silice, car les petits cristaux finissent par disparaître à leur tour. Dans les meilleures conditions de température, c'est-à-dire entre 800° et 900°, les cristaux atteignent, après vingt-cinq jours de chauffe, des dimensions linéaires qui les rendent parfaitement déterminables. Accolés les uns aux autres, ils forment des druses très ramifiées, qui tapissent les parois du creuset. Quelques cristaux sont aussi régulièrement développés que les cristaux naturels. Cependant, on rencontre plus souvent que dans les leucitophyres des cristaux allongés suivant l'un des axes de symétrie quaternaire du pseudo-icositétraèdre a^2. Ces cristaux mesurables portent des traces indélébiles de leur mode de formation, car on aperçoit des inclusions de vanadate de potasse dans un grand nombre des plus parfaits et des plus limpides. Ils sont hyalins ou légèrement opalins, quelquefois blonds. Les faces réfléchissent bien la lumière, malgré les stries fines qu'on y découvre presque toujours par un examen à la loupe. Quelques faces présentent des stries comparables à celles qu'on observe sur les cristaux maclés des feldspaths tricliniques.

» Les angles dièdres des huit angles trièdres de ces cristaux à vingt-quatre faces ne diffèrent pas les uns des autres de plus de 20′ : la moyenne des mesures goniométriques s'écarte très peu de 146°27′, angle mesuré sur l'arête F de l'icositétraèdre a^2. Les angles dièdres des angles solides à quatre faces ne sont pas aussi constants, car on a trouvé les valeurs extrêmes suivantes : 131°27′ et 137°. La mesure des angles dièdres des cristaux d'amphigène obtenus par dissolution apparente montre donc que les seuls angles solides qu'on puisse regarder comme fixes et constants sur un cristal donné

sont les angles trièdres. Quant aux différences constatées entre les trois angles dièdres d'un de ces angles solides, elles sont de l'ordre des erreurs d'observation ; elles peuvent servir, cependant, à établir que ces polyèdres à vingt-quatre faces sont entièrement comparables à ceux observés par vom Rath sur les cristaux provenant de la Somma. L'examen optique confirme cette déduction et permet de comparer la structure des cristaux obtenus par le vanadate avec celle des cristaux d'amphigène de Frascati décrits par M. Mallard.

» Les cristaux taillés en lames à faces parallèles se colorent lorsqu'on les examine entre les nicols croisés : le mode de préparation des cristaux ne permettant pas de supposer qu'ils renferment des lames minces d'un minéral biaxe, l'amphigène artificiel est biréfringent et, par suite, les cristaux n'appartiennent pas au système cubique. Leur forme primitive est très voisine du cube et l'ellipsoïde d'élasticité optique diffère peu de la sphère, car les lames d'amphigène artificiel prennent dans la lumière polarisée parallèle la teinte bleu pâle propre aux substances dont les indices sont presque égaux.

» Les coupes minces pratiquées dans les cristaux permettent, en outre, d'étudier leur structure. L'examen, dans la lumière polarisée parallèle, montre que l'extinction ne se produit pas toujours simultanément pour tous les points de la section d'un cristal, et que les plages amenées dans l'azimut d'extinction présentent des lignes ou des bandes claires, tandis que les plages orientées différemment montrent des bandes obscures. Quelquefois le nombre de ces bandes est si considérable que la plage elle-même est formée par des bandes très étroites, alternativement claires et foncées. Les bandes de deux plages contiguës sont souvent rectangulaires entre elles.

» Les extinctions se font quelquefois symétriquement par rapport au plan de jonction des bandes. C'est ce que l'on constate ordinairement sur les sections qui présentent des lamelles hémitropes dans deux directions rectangulaires, car alors l'extinction se produit suivant la bissectrice des deux séries de bandes. Ces observations suffisent pour montrer que la structure des cristaux d'amphigène artificiel est aussi compliquée que celle des cristaux de Frascati et qu'ils se composent comme ceux-ci de plusieurs systèmes de macles répétées.

» Les cristaux destinés à l'analyse de ce silicate ont été préparés avec un mélange très intime de silice et d'alumine pulvérulentes Ils étaient très petits, mais très nets, exempts d'inclusions étrangères et, par consé-

quent, très propres à faire connaître la composition de ce silico-aluminate de potasse. Les rapports entre les proportions d'oxygène de la potasse, de l'alumine et de la silice sont très voisins de 1 : 3 : 8. Par la composition, comme par la forme, ces cristaux appartiennent donc bien à l'espèce amphigène.

» L'acide qui attaque le mieux les cristaux est l'acide sulfurique, autre trait commun avec ceux de l'espèce naturelle.

» La densité de l'amphigène artificiel est 2,47 à 13°, celle de l'amphigène est 2,48, d'après M. Damour.

» L'amphigène a donc été reproduit avec toutes ses propriétés essentielles et même avec des particularités qu'on pouvait regarder comme accidentelles et dues aux circonstances de sa formation dans les laves. »

MINÉRALOGIE. — *Sur la martite du Brésil*; par M. GORCEIX. (Extrait d'une Lettre à M. Delesse.)

« On trouve en grande quantité dans la province de Minas Geraes une série de cristaux dérivés du cube et affectant toutes les formes de la pyrite de fer : cube, pyritoèdre, octaèdre et combinaisons de ces modifications. Les octaèdres dominent.

» Ces cristaux sont formés de limonite, d'oligiste, de fer oxydulé magnétique, soit purs, soit mélangés en toutes proportions. Leur poussière est jaune, brune, rouge de sang, rouge foncé, gris rougeâtre, très rarement gris d'acier.

» Les uns sont brillants, les autres ternes. A la première catégorie appartiennent la plupart des cristaux octaédriques, dont un très grand nombre, bien que leur poussière ait la couleur rouge caractéristique de l'oligiste, sont plus ou moins magnétiques.

» Les cristaux en question sont spécialement disséminés dans les roches schisto-talqueuses ; on les rencontre aussi très fréquemment à l'état d'octaèdres brillants, près de certains filons de quartz blanc aurifère qui traversent les itabirites, ainsi que dans les roches grenues qui leur sont associées.

» On les trouve aussi en quantité considérable dans les roches schisto-talqueuses du plateau de Boa-Vista, près Ouro-Preto, où sont situés les gisements de topazes et d'euclases. Là encore on constate que dans les roches talqueuses lustrées, cristallines, ce sont surtout les cristaux octaé-

driques brillants qui dominent, tandis que dans les couches plus argileuses, où souvent le talc est mélangé à des grains de quartz, ils sont ternes et conservent, sans que le moindre doute soit possible, les caractères montrant qu'ils proviennent de l'altération de la pyrite de fer.

» Dans certains cas on trouve même, au milieu des talcs compactes, des cristaux octaédriques, sans traces de fer, et formés de la même matière que la roche dans laquelle ils sont disséminés; dans d'autres cas, le talc est mélangé à l'oxyde de fer en quantité plus ou moins grande.

» Les cristaux brillants, à poussière rouge, sont connus sous le nom de *martite;* quant aux cristaux ternes, en général cubiques ou pyritoédriques, on a abandonné complètement l'idée d'en faire une espèce nouvelle, tout en la conservant pour les premiers.

» Je crois que les uns et les autres ne sont que des pyrites altérées, dans lesquelles la désulfuration a été produite par l'action de l'eau, soit à l'état de vapeur, soit à l'état liquide.

» La transformation des pyrites en limonite, en conservant leur forme primitive, est un fait qui se passe sous nos yeux.

» Ils affectent les diverses formes de la pyrite; leurs surfaces sont ternes, rugueuses; à l'intérieur, ils sont souvent remplis de cavités irrégulières. Leur structure n'est pas homogène. Ils sont formés soit de limonite, soit d'oligiste.

» J'ai même retrouvé au milieu de l'un d'eux des cristaux octaédriques de soufre, comme témoins irrécusables de son origine. Cet échantillon était un cube de plusieurs centimètres de côté, dont le centre était occupé par une géode tapissée de cristaux de soufre. Il était formé de limonite mélangée de quartz, circonstance fréquente parmi les cristaux pseudomorphiques de pyrite et qui me porte à attribuer leur altération à des actions geysériennes.

» A côté de ces cristaux, dont le pseudomorphisme n'est pas douteux, il en reste d'autres moins ternes, plus compactes, à poussière rouge, quelquefois en partie attirables à l'aimant. Leur aspect les rapproche tellement des premiers, au milieu desquels on les rencontre souvent, qu'il est naturel de leur attribuer la même origine.

» Il en est de même pour les cristaux brillants de martite, auxquels ils servent de passage, et qui sont composés d'oligiste ou d'oligiste mélangé d'oxyde magnétique.

» Lorsque le cristal de pyrite a disparu tout entier, le vide qu'il laissait a pu être rempli par la matière de la roche, et cette dernière, modifiée par les agents métamorphiques, a donné lieu à la formation de talc.

» Dans les roches de la province de Minas, l'apparition de l'or me paraît subordonnée à celle des pyrites de diverse nature qui constituent sa gangue dans toute la série des roches micacées et talqueuses. Dans les itabirites, il n'y a plus traces de pyrites, qui sont remplacées par de l'oligiste. Les phénomènes métamorphiques auxquels sont dus ces énormes dépôts de fer oligiste ont vraisemblablement fait disparaître les pyrites et réduit l'or à l'état métallique. Un cristal que je possède justifie cette manière de voir : il est octaédrique, formé dans une moitié par de l'oligiste pur, très brillant, dans l'autre par un mélange d'*or* et d'oligiste.

» En résumé, par la simple hypothèse d'une altération des pyrites, il est possible d'expliquer les faits de pseudomorphisme et de remplissage qu'on observe au milieu de certaines roches métamorphiques de la province de Minas et en même temps la disparition des pyrites de fer dans les itabirites aurifères, si intimement liées aux roches talqueuses, où l'or a pour gangues les pyrites ordinaires ou arsénicales. »

PHYSIOLOGIE COMPARÉE. — *Recherches expérimentales sur la phosphorescence du Lampyre.* Note de M. JOUSSET DE BELLESME.

« L'électricité, le fluide nerveux, l'insolation et les forces vitales ont été invoqués tour à tour comme causes de la phosphorescence. Finalement, on s'est arrêté à l'existence d'une matière phosphorescente émise par les animaux lumineux, ce qui paraît plus vraisemblable. J'ai cru devoir étudier de nouveau ce phénomène chez le Lampyre, parce que les recherches faites par Matteucci, le principal expérimentateur qui se soit occupé de la question, n'ont pas été conduites avec une méthode irréprochable. En effet, ni cet auteur ni les autres n'ont tenu compte dans leurs expériences de la volonté de l'animal et n'ont cherché à éliminer cette cause d'incertitude, de sorte que, lorsqu'ils plaçaient un Lampyre dans l'acide carbonique, par exemple, ils ne pouvaient apprécier exactement si la phosphorescence cessait parce que le milieu ne lui permettait pas de se produire ou parce que l'animal se refusait volontairement à briller. Il fallait tout d'abord se rendre maître du phénomène et, pour cela, empêcher l'animal de luire à sa volonté et le forcer à devenir lumineux au gré de l'expérimentateur. Dans ce but, j'enlève les ganglions céphaliques, ce qui abolit toute phosphorescence spontanée, puis je remplace l'excitation volontaire par le passage d'un courant électrique modéré dans le tronc ou dans l'organe lumineux. Cette excitation détermine, à coup sûr, une phosphorescence éclatante.

» Armé de ce procédé, j'ai constaté, comme l'avait vu Matteucci, que la présence de l'oxygène est en effet absolument nécessaire pour que l'appareil lumineux puisse entrer en fonction. L'insecte préparé comme je viens de le dire, plongé dans l'acide carbonique ou les gaz inertes, azote, hydrogène, et excité électriquement dans ces gaz mêmes, ne devient jamais lumineux.

» On peut donc regarder comme certain que les grosses cellules à protoplasma granuleux constituant le parenchyme de l'appareil phosphorescent produisent une substance qui devient lumineuse au contact de l'air amené par les nombreuses trachées qui sillonnent cet appareil.

» Il faudrait, pour savoir quelle est cette matière, pouvoir l'isoler et en faire l'analyse. On l'a déjà tenté. La ressemblance de cette lueur avec celle du phosphore a engagé plusieurs chimistes à rechercher cette substance dans l'appareil lumineux; mais leurs recherches ont été vaines, de sorte que les naturalistes se sont trouvés en présence de deux assertions contradictoires. Le présent Mémoire démontre que cette contradiction n'est qu'apparente et qu'elle tient à une mauvaise interprétation d'un fait vulgaire. Quand on écrase un Lampyre, on voit très habituellement sur le sol persister des traces lumineuses; on en a conclu qu'il en était de son appareil comme des allumettes et que ces traces n'étaient autres qu'une matière phosphorescente amassée dans l'appareil pour les besoins ultérieurs de l'insecte. L'expérience ainsi faite est très défectueuse; reprenons-la avec plus de méthode. Si l'on se borne à dilacérer avec des aiguilles un Lampyre phosphorescent, les fragments restent lumineux pendant plusieurs heures au moins. Si au contraire on écrase rapidement un de ces insectes dans un mortier, de manière à détruire les cellules mêmes, la phosphorescence disparaît immédiatement; la pulpe recueillie, exposée au contact de l'oxygène pur, soumise à l'influence de l'excitation électrique, reste absolument sombre. Donc un écrasement partiel permet à la phosphorescence de se produire encore, un écrasement complet l'abolit. Dans l'hypothèse d'une réserve de matière phosphorescente, l'écrasement poussé très loin serait évidemment favorable à la production de la lumière en étalant cette matière sur une large surface au contact de l'air : c'est le contraire qui a lieu; la phosphorescence ne persiste que si l'appareil est seulement divisé en fragments. Cela tient à ce que des groupes de cellules restées intactes continuent à vivre et à fonctionner. La dilacération et le contact anomal de l'air les excitent, et leur protoplasma, réagissant sous ces influences, produit la matière phosphorescente aux dépens des matériaux qu'il contient. Si l'on tue ces cellules en les écra-

sant, la vie n'intervient plus pour mettre ces matériaux en œuvre et leur donner la forme chimique sous laquelle peut se montrer la phosphorescence.

» Nous sommes donc ici en présence d'un phénomène d'ordre chimique, mais qui ne se produit chez le Lampyre que dans des conditions biologiques. Nous pouvons d'ailleurs le démontrer d'une autre manière. Outre l'écrasement, certains agents toxiques ont aussi le pouvoir de détruire les cellules. Si nous soumettons un Lampyre à l'action de l'hydrogène sulfuré, il est tué immédiatement. Prenons-le de suite, excitons-le électriquement : nous n'obtenons pas de lumière. Les cellules sont intactes dans leur forme, mais détruites physiologiquement ; elles ne fonctionnent plus. Dès lors nous pouvons dilacérer l'organe, faire agir l'oxygène, l'électricité, sans provoquer la phosphorescence. Il est certain cependant que ce protoplasma contient tous les matériaux chimiquement nécessaires à la production de la substance phosphorescente ; mais cette substance n'est pas toute faite. Elle ne se produit qu'au fur et à mesure de la consommation, sous l'influence de la volonté et par l'intermédiaire du système nerveux, qui excite les cellules et les fait entrer en fonction. La phosphorescence est donc un phénomène du même ordre que le mouvement musculaire, le dégagement d'électricité dans l'appareil de la Torpille, lesquels sont sans aucun doute le résultat de combinaisons chimiques s'effectuant dans la matière protoplasmatique.

» Il est très probable que cette substance phosphorescente est un produit gazeux, car la structure de la glande, bien étudiée par Owsjanikof, ne nous donne pas l'idée d'un organe à sécrétion liquide. Or les produits chimiques phosphorescents à la température ordinaire ne sont pas nombreux ; celui auquel on est conduit à penser est l'hydrogène phosphoré. C'est aux chimistes à élucider ce point ; mais ils doivent, à cause des particularités que je viens de signaler, non pas chercher à en constater la présence directement, mais bien voir s'il y a dans le protoplasma cellulaire de l'appareil les matériaux nécessaires à la production de ce gaz.

» Ce qui me fait pencher en faveur de cette hypothèse, c'est l'extrême similitude qu'on remarque entre la phosphorescence des matières en décomposition, laquelle est due à un dégagement d'hydrogène phosphoré, et celle des animaux lumineux. Elles présentent les mêmes caractères physiques, la même affinité pour l'oxygène, et ne diffèrent qu'en ce point que les phosphorescences cadavériques sont continues comme la décomposition des matières qui les produisent, tandis que la phosphorescence des

animaux est intermittente. Cela tient à ce que la décomposition cellulaire qui met en liberté le produit lumineux ne s'exécute, chez les animaux élevés en organisation, que par l'excitation du système nerveux, et, chez les animaux inférieurs (Noctiluques), qu'au moyen des excitants extérieurs.

» Mes recherches sur le Lampyre et les expériences que j'ai faites sur les Noctiluques me portent à considérer la phosphorescence comme une propriété générale du protoplasma, consistant en un dégagement d'hydrogène phosphoré. Cette manière de l'envisager nous fait comprendre aisément comment beaucoup d'animaux inférieurs, dépourvus de système nerveux, sont phosphorescents. De plus, elle nous offre l'avantage de relier les phénomènes de phosphorescence qui s'observent sur les êtres vivants à ceux qu'on remarque dans les matières organiques en voie de désagrégation. C'est un exemple de plus d'un phénomène d'ordre biologique réduit très nettement à une cause exclusivement chimique. »

PHYSIOLOGIE. — *Recherches sur l'action physiologique de l'acide salicylique sur la respiration*. Note de M. CH. LIVON, présentée par M. Robin.

« L'action physiologique de l'acide salicylique sur la respiration est compliquée, et, en l'étudiant attentivement, on ne s'étonne plus que les uns aient signalé du ralentissement des mouvements respiratoires, les autres, au contraire, de l'accélération.

» Les expériences que je poursuis démontrent que cette divergence provient des doses administrées et des diverses périodes de l'observation.

» En effet, en administrant à dose élevée du salicylate de soude en injection intra-veineuse (8^{gr}, par exemple, pour un chien de 16^{kg}), le premier effet, quelquefois immédiat, avant même la fin de l'injection, qui demande toujours plusieurs minutes, est un ralentissement du rythme respiratoire; puis survient une accélération qui peut porter le nombre des inspirations à cent cinquante à la minute. Cette augmentation est ensuite suivie d'un ralentissement qui précède la mort, survenant par arrêt de la respiration.

» Le ralentissement seul se manifeste si les doses sont faibles. C'est ainsi qu'un cobaye ayant quatre-vingts inspirations à la minute n'en présentait plus que soixante-quatre quelque temps après l'administration de $0^{gr},02$ de salicylate de soude en injection sous-cutanée.

» L'action ne se fait pas moins sentir sur l'acide carbonique exhalé.

» Voici la moyenne des résultats que j'ai obtenus sur divers animaux dont j'ai dosé les produits de la respiration.

» Les chiffres suivants représentent l'acide carbonique exhalé, calculé pour une heure de durée et 1^{kg} de chaque espèce animale :

	gr
Acide carbonique produit normalement par un cobaye	0,603
Acide carbonique produit sous l'influence de $0^{gr},02$ à $0^{gr},03$ de salicylate de soude	0,338
Acide carbonique sous l'influence de $0^{gr},25$	1,137
Acide carbonique sous l'influence de $0^{gr},50$	1,317
Acide carbonique produit normalement par une tourterelle	1,111
Acide carbonique produit sous l'influence de $0^{gr},05$ de salicylate	1,923
Acide carbonique produit normalement par une grenouille	0,095
Acide carbonique produit sous l'influence de $0^{gr},05$ de salicylate	0,225

» L'explication la plus vraisemblable de ces faits me paraît être la suivante :

» D'abord diminution des réflexes respiratoires, l'acide salicylique ayant la propriété de diminuer les propriétés réflexes de la substance grise bulbo-médullaire.

» Puis, sous l'influence des doses élevées, la substance, s'accumulant dans le liquide céphalo-rachidien, produit une excitation des racines des pneumogastriques, d'où l'accélération. Mais l'excitation, allant toujours en augmentant, ne tarde pas à amener le ralentissement et bientôt l'arrêt de la respiration. »

PHYSIQUE DU GLOBE. — *La température des lacs gelés.* Note de M. F.-A. Forel.

« M. J.-Y. Buchanan a publié, en 1879 (*Nature*, t. XIX, p. 421), d'intéressants sondages thermométriques exécutés sous la glace des lacs écossais ; ces sondages ont sensiblement modifié les idées admises sur la limite de la propagation verticale du froid dans l'eau douce. Au lieu de trouver, comme il s'y attendait, au fond du lac une couche d'eau à 4° C., température du maximum de densité de l'eau, M. Buchanan a vu, dans le loch Lomond, la température de l'eau s'élever graduellement de 0° à la surface jusqu'à 2°,4 à 20^{m} de profondeur, mais ne pas s'élever plus haut. En faut-il conclure à l'inexactitude de la théorie classique de la congélation des lacs ?

Suivant cette théorie, l'eau, après s'être refroidie dans toute sa masse jusqu'à 4° sous l'action des courants de convection thermique, se refroidit ensuite seulement à la surface, en se stratifiant en couches d'autant plus froides qu'elles sont plus superficielles, conformément à l'ordre de leurs densités. Les observations suivantes montrent que les profondeurs atteintes par M. Buchanan n'étaient pas suffisantes pour lui faire voir la limite du refroidissement superficiel, refroidissement qui descend beaucoup plus bas qu'on ne l'a jamais supposé.

» J'ai répété ces recherches dans des lacs suisses plus profonds que les lochs écossais; mes sondages, exécutés avec un thermomètre Negretti et Zambra, ont été faits dans le lac de Morat le 23 décembre 1879 et le 1er février 1880, et dans le lac de Zürich, le 25 janvier 1880.

» I. *Lac de Morat* (superficie 27^{km},4; profondeur maxima 45^{m}). — Le lac a été pris par la glace le 18 décembre. Épaisseur de la glace : 23 décembre, 0^{m},11; 1er février, 0^{m},36.

Profondeur.	23 décembre.	1er février.	Différence.
m	o	o	o
0	0,36	0,35	−0,01
5	1,60	1,90	+0,30
10	2,00	2,00	0,00
15	2,23	2,45	+0,22
20	2,46	2,50	+0,04
25	2,60	2,50	−0,10
30	2,66	2,40	−0,26
35	2,75	2,55	−0,20
40	2,70	2,70	0,00
Moyenne	2,15	2,15	

II. *Lac de Zürich* (superficie, 87^{km},8; profondeur maxima, 141^{m}). — Le lac a été pris par la glace pendant deux jours à la fin de décembre, puis de nouveau et définitivement le 21 janvier. Épaisseur de la glace le 25 janvier, 0^{m},10.

Profondeur.	Température.	Profondeur.	Température.
m	o	m	o
0	0,2	70	3,7
10	2,6	80	3,8
20	2,9	90	3,8
30	3,2	100	3,9
40	3,5	110	3,9
50	3,6	120	4,0
60	3,7	133	4,0

» De ces chiffres je tire les conclusions suivantes :

» 1° L'ancienne théorie de la congélation des lacs, qui admet un refroi-

dissement progressif de toute la masse jusqu'à 4°,0, puis un refroidissement des couches superficielles se stratifiant de 0° à 4° suivant leur ordre de densité, cette ancienne théorie est exacte.

» 2° La pénétration du froid dans les couches supérieures peut descendre jusqu'à 110^m de profondeur (Zürich).

» 3° C'est par suite de son peu de profondeur que le loch Lomond n'a pas montré à M. Buchanan la température de 4°,0 dans ses couches profondes.

» 4° Cette pénétration du froid dans les couches supérieures a lieu très graduellement et progressivement. La courbe que l'on peut tirer de mes chiffres du lac de Zürich ne présente ni sauts ni saccades; elle est tout à fait analogue aux courbes du réchauffement superficiel d'un lac en été. Cela suffit, me semble-t-il, pour écarter la supposition que le refroidissement, qui pénètre aussi profondément, ait lieu ou bien par voie de convection thermique ou bien par mélange mécanique sous l'action des vagues et des courants, à l'exception peut-être de la couche supérieure de 5^m à 10^m d'épaisseur.

» Faut-il attribuer cette pénétration du froid à des phénomènes de conductibilité ou à des phénomènes de radiation, soit de l'eau elle-même, soit du sol à travers l'eau? Les expériences ne me donnent pas d'éléments pour répondre à cette question.

» 5° Si je compare les deux séries de sondages faites dans le lac de Morat à quarante jours d'intervalle, je vois que la température moyenne est restée exactement la même; la couche de glace a donc arrêté absolument le refroidissement de l'eau, et toute l'action du froid extérieur a été dépensée dans l'accroissement d'épaisseur de la glace.

» 6° L'eau du lac de Morat a subi, dans ces quarante jours sous la glace, une égalisation de la température; les couches supérieures plus froides se sont un peu réchauffées, les couches profondes plus chaudes se sont refroidies. Mais nous sommes encore bien loin de trouver, le 1er février, une uniformité complète de la température dans toute la profondeur du lac. »

GÉOLOGIE. — *Les deltas torrentiels.* Extrait d'une Lettre de M. **Desor** à M. Daubrée.

« Nice, le 14 février 1880.

» La plupart des géologues qui ont examiné les terrains récents du littoral de la Corniche s'accordent à les considérer, avec M. de Rosemont,

comme d'anciens deltas. Je n'ai pas eu de peine à me ranger à cette opinion, qui comprend dans la catégorie des anciens deltas non seulement les dépôts quaternaires, mais aussi ces puissants amas de conglomérats qui se trouvent à l'embouchure des principales rivières de l'ancienne Ligurie (le Var, la Roja, la Nervia, l'Arosia) et que j'ai décrits sous le nom de *conglomérat ligure*.

» Ces conglomérats, dont le caractère pliocène est aujourd'hui incontestable, attesté qu'il est par des coquilles marines caractéristiques, sont dès lors des deltas remontant à l'époque tertiaire.

» Une particularité cependant les distingue des deltas classiques, tels que ceux du Nil, du Pô et du Rhône : c'est que leurs couches, au lieu d'être horizontales, sont inclinées sous un angle de 12° à 20° dans les collines du Var. Jusqu'ici cette disposition n'avait, que je sache, été observée dans aucun des deltas formés par les fleuves qui débouchent directement dans la mer; elle n'était connue que dans les bassins intérieurs, à l'embouchure des torrents qui se déversent dans les lacs. L'exemple le plus frappant que l'on puisse citer, c'est un delta formé par un torrent du canton d'Unterwald, qui se jette dans le lac de Lungern. Le niveau de ce lac ayant été abaissé artificiellement, en vue d'en assainir les bords, le delta formé par le torrent s'est trouvé à sec, de façon qu'on a pu en étudier en détail la composition. On s'est ainsi assuré qu'il se composait de bancs de gravier inclinés de 35°, alternant avec des bancs de gros galets présentant la même inclinaison et la même épaisseur de haut en bas, tandis que les parties vaseuses s'étaient déposées au large en couches plus ou moins horizontales.

» Ces résultats ont été corroborés de tous points par les recherches de M. Colladon sur l'ancien delta de l'Arve, au plateau des Tranchées, qui aujourd'hui fait partie de la ville même de Genève. Ici, les couches sont régulièrement inclinées sous un angle qui va jusqu'à 45°. Enfin, M. Falsan a reconnu une disposition tout à fait semblable dans plusieurs gravières des bords de la Saône, spécialement dans celle de Grammont en Beaujolais.

» On ne saurait douter, d'après ces exemples, que ce ne soit le propre des torrents, lorsqu'ils rencontrent un lac sur leur chemin, d'y déposer leurs alluvions en couches *inclinées*, toutes les fois qu'il s'agit de matériaux plus ou moins grossiers, tandis que les limons et sables fins vont se déposer au large en couches horizontales. S'il en est ainsi des bassins intérieurs, il n'y a pas de raison pour que le même phénomène ne se repro-

duise lorsque des torrents débouchent dans la mer. Or, les rivières des Alpes maritimes sont à tous égards des torrents. Quelques-uns, tel que le Var, comptent parmi les plus turbulents. Il n'y a dès lors rien d'anomal à ce que les anciens deltas du Var, de la Roja, de la Nervia soient disposés en couches inclinées, puisque le régime de ces rivières était le même que celui des autres torrents des Alpes. Ce sont des deltas *torrentiels*, comme ceux qui sont en voie de formation de nos jours.

» Il y aura lieu peut-être de distinguer à l'avenir, plus qu'on ne l'a fait jusqu'à présent, entre ces deux types de deltas : les deltas torrentiels et les deltas de grandes rivières. Cette distinction me paraît en tous cas aussi importante, au point de vue géologique, que celle que l'on a établie entre les deltas marins et les deltas lacustres. »

M. Chasles présente à l'Académie, de la part de M. B. Boncompagni, les livraisons d'août et septembre 1879 du *Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche*, et une Table fort étendue des noms d'auteurs qui termine le Tome XI du *Bullettino* de 1878.

La livraison d'août contient les neuf premiers Chapitres de la seconde Partie des *Recherches* de M. C. Henry *sur les manuscrits de Fermat*, suivies de fragments inédits de Bachet et de Malebranche. Cette Partie est consacrée à la publication de documents nouveaux et à l'éclaircissement de divers points particuliers. On remarque dans ce cahier : 1° quelques renseignements sur un ami de Fermat, Jean Despagnet; 2° trois Lettres de Fermat à Séguier, dont la seconde, écrite le 18 août 1648, est suivie d'un Mémoire sur le moyen de rétablir les finances; 3° une Lettre de Huet à Fermat et à son fils sur de savantes conjectures philologiques de Fermat; 4° une Lettre de Fermat à Huet; 5° deux Lettres de Fermat à Huygens, dont la seconde, suivie d'une poésie latine de Fermat, nous révèle, grâce au commentaire de M. Henry, un singulier détail; 6° la publication *in extenso* d'une Lettre de Pascal, qui, éditée partiellement dans un Mémoire de Van Swinden en 1817, était restée inconnue à tous les éditeurs; 7° un Catalogue et des extraits de divers écrits mathématiques, dont un grand nombre sont des autographes de Malebranche et plusieurs autres attribués à lui par les Catalogues inédits et imprimés de la Bibliothèque nationale; 8° une Lettre inédite de Pascal à M. Huguens, à la Haye; 9° enfin, un essai de démonstration par Malebranche du théorème $x^n + y^n \gtrless z^n$, n étant < 2. A la suite se trouve (p. 569-618) une Table fort étendue des publications récentes, physiques et mathématiques, en toutes langues.

Le *Bullettino* de septembre contient la continuation des *Recherches* de M. C. Henry. Ce sont des fragments d'un manuscrit inédit de Bachet de Méziriac, puis des théorèmes de Malebranche sur les carrés, extraits de manuscrits de la Bibliothèque nationale.

La séance est levée à 4 heures un quart. J. B.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans la séance du 9 février 1880.

Bulletin de la Société industrielle d'Amiens; t. XVI, n° 1; t. XVII, n°s 2 à 6; t. XVIII, n° 1. Amiens, impr. T. Jeunet, 1878-1880; 7 livr. in-8°.

Société des Sciences médicales de Gannat. Comptes rendus des travaux de l'année 1878-1879. Paris, V. A. Delahaye, 1879; in-8°.

Le Phylloxera en 1879. *Mémoire adressé à M. Paulin Talabot; par* M. G. Vimont. Paris, impr. Paul Dupont, 1879; in-8°.

Réponse de M. l'abbé Aoust *à la Lettre de M.* Habich *sur une question de priorité et sur l'Analyse infinitésimale des courbes planes de M. Aoust.* Marseille, typogr. Barlatier-Feissat, 1879; br. in-8°.

Annalen der K. K. Sternwarte in Wien; dritter Folge achtundzwanzigster Band, Jahrgang 1878. Wien, 1879; in-8°.

Zweite Abhandlung über die Wasserabnahme in den Quellen, Flüssen und Strömen bei gleichzeitiger Steigerung der Hochwässer in den Culturländern; von G. Ritter von Wex. Wien, Waldheim, 1879; in-4°.

Ueber die Berechnung der wahren Anomalie in nahezu parabolischen Bahnen; von T. Ritter von Oppolzer. München, 1879; in-4°.

Bulletin de la Société ouralienne d'amateurs des Sciences naturelles; t. V, livr. 2. Ekatherinbourg, 1879; in-4°.

Ouvrages reçus dans la séance du 16 février 1880.

Ch. Brongniart et Max. Cornu. *Epidémie causée sur les diptères du genre* Syrphus *par un Champignon* entomophthora. Paris, impr. Chaix, sans date; opuscule in-8°.

Le Phylloxera en 1879. Mémoire adressé à M. Paulin Talabot, par M. G. Vimont. Paris, P. Dupont, 1879; br. in-8°.

Formes vibratoires des bulles de liquide glycérique; par C. Decharme. Angers, Lachèze et Dolbeau, 1880; in-8°.

Astronomie populaire; par C. Flammarion. 13e, 14e, 15e séries. Paris, Marpon et Flammarion, 1880; 3 livr. in-8° illustrées.

De l'influence de l'hiver et de l'été de 1879 sur la végétation des plantes exotiques dont l'acclimatation est tentée au Jardin botanique de l'Ecole de Médecine de Brest; par le Dr A. Borius *et* J. Blanchard. Paris, A. Lahure, 1880; in-8°. (Extrait des *Archives de Médecine navale.*) (Présenté par M. Chatin.)

De la détermination des chaleurs spécifiques à volume constant dans le cas des corps simples et composés; par M. G. Quesneville. Paris, Renou, Maulde et Cock, 1880; in-4°. (Extrait du *Moniteur scientifique de Quesneville.*)

Sur la solubilité des calculs urinaires dans les solutions de benzoate de lithium et de borocitrate de magnésium; par H.-P. Madsen. Copenhague, Bianco Luno, 1879; br. in-8°.

Considérations physiologiques et thérapeutiques, et description d'un appareil pour l'emploi méthodique des atmosphères artificiellement suroxy-ozonées ou surazotées. Oxythérapie et Azothérapie; par le Dr Tamin-Despalles. Bruxelles, Manceaux; Paris, Delahaye, 1877; in-8°.

Bullettino di bibliografia e di storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. T. XI, *Indici degli articoli e dei nomi;* t. XII, agosto, settembre 1879. Roma, 1878; 3 livr. in-4°. (Présenté par M. Chasles.)

Annotazioni sopra un organo speciale e non descritto nel Lophius piscatorius *di* Enrico F. Trois. Venezia, tipogr. Antonelli, 1880; br. in-8°.

Ueber die Bahn eines materiellen Punktes, der sich unter dem einflusse einer Centralkraft von der Form $\frac{\mu_1}{r^2} + \mu_2 r$, *bewegt von* Hugo Gyldén. Stockholm, 1879; in-4°.

ERRATA.

(Séance du 26 août 1878. — T. LXXXVII.)

Page 357, ligne 9, mettre devant le second terme du numérateur de l'équation en y (formules 2) le coefficient $\frac{1}{2}$.